CONSTANTIN POPA
Prof. gr. I
Colegiul Național "Nicu Gane" Fălticeni

FIZICA

Îndrumător metodic

409 Probleme rezolvate

Nivel liceal

Vol. I

11-19.995

OMNIA
Iaşi, 2006

BIBL. CENTR. UNIV.
„M. EMINESCU" IAŞI
FIZICA
11-19995

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CONSTANTIN POPA

Fizică
409 probleme rezolvate

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Coperta: Călin Cocora

Carte aparută cu sprijinul Primăriei Municipiului Fălticeni

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
POPA, CONSTANTIN
Fizica : îndrumător metodic : 409 probleme rezolvate : nivel liceal / Constantin Popa - Ed. a 2-a. -Iaşi : Omnia, 2006
2 vol.
ISBN (10) 973-87531-0-4 ; ISBN (13) 978-973-87531-0-5

53(075.35)(076.3)

Editura OMNIA
IASI, 2006
TEL: 0232.435.734

ISBN 973 – 87531 – 0 – 4

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

CONSTANTIN POPA
Prof. Gr I
Colegiul Naţional "Nicu Gane" Fălticeni

Fizică

Îndrumător metodic

409 probleme rezolvate

Nivel liceal

Vol.I

Ediţia a II – a

135199
B.C.U. - IASI

"Dedic această carte familiei mele din localitatea natală, foştilor elevi şi prietenilor."

Autorul

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cuvânt înainte

Despre metoda dascălului aristocrat Constantin Popa

Domnul Constantin Popa, pensionar şi fost profesor de fizică (aşa cum singur se defineşte prin ambele atribute), produce, iată, o nouă lucrare de îndrumare metodică în străbaterea planului – relativ! – înclinat al fizicii. Sârguinţa cu care scoate la lumină şi acum, după o carieră profesională împlinită, alte şi alte exponate din laboratorul una cu fiinţa sa, nu este egalată decât de tenacitatea prin care cere cu măsură comunităţii mijlocirea tipăririi celei mai noi creaţii a Domniei sale oferindu-se, la schimb, să doneze întreg tirajul tinerilor studioşi. De unde se vede că zicala „Dar din dar se face Rai" este în fapt transpunerea în plan religios a principiului fizic al acţiunii şi reacţiunii.

Despre domnul profesor Constantin Popa, o legendă vie a învăţământului fălticenean, sunt prea multe de spus pentru a mărturisi într-o pagină onoarea de a scrie acest cuvânt-înainte. Ca fost elev al Domniei sale nu pot decât să fiu purtătorul de cuvânt al sutelor, poate miilor de elevi care îi datorează o parte importantă a împlinirii lor prezente, profesionale şi umane. Produs al şcolii româneşti tradiţionale de ştiinţe exacte, el însuşi a creat o şcoală de fizică pe temeiul unor criterii etice şi pedagogice care, în vremurile de acum, din varii motive asupra cărora nu mă pronunţ aici, sunt din nefericire de neatins.

Celor de astăzi, care nu ştiu cum era să fii licean în secolul trecut (!), care nu ştiu că la Fălticeni elita profesorilor şi elita elevilor se generau una pe cealaltă pentru a forma, în final, elitele comunităţii, lor vreau să le povestesc despre un tic

verbal al domnului profesor Constantin Popa. Atunci când se mai supăra pe vreun elev, dar de cele mai multe ori supărarea era jucată pentru propriul deliciu şi al celui al asistenţei, profesorul Popa exclama: „Măi, să vii cu taică-tău tuns la şcoală!". Evident că dascălul dorea să zică că trebuie să te tunzi (era aceasta o formă de pedeapsă pe atunci) şi să vii cu tata în faţa lui. Aşa însă cum se înşirau cuvintele în amintita expresie, era normal să producă ilaritate. Tatăl meu nu mai trăieşte, Dumnezeu să-l odihnească! dar, dacă ar mai trăi, aş merge cu el tuns, chiar şi astăzi, la Şcoala Profesorului Constantin Popa.

Primar,
Ing. Vasile Tofan

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În loc de biografie

Colegul meu, Constantin Popa, s-a născut la 11 mai 1929, în satul Vămeni, comuna Dolhasca, județul Suceava, dintr-o familie numeroasă de şase copii, tatăl său fiind învățător, iar mama sa casnică. Chiar din adolescență a prins timpuri grele, în fostul regim totalitar, în care toată familia a avut de suferit şi implicit colegul meu. Şi-a făcut studiile liceale la Liceul ''Nicu Gane'' din Fălticeni, iar cele universitare la Iaşi, la Universitatea ''Al. I. Cuza'', Facultatea de Matematică şi Fizică, secția Fizică. A fost admis la facultate destul de târziu, la vârsta de 24 de ani şi după 5 ani de studii, la 29 de ani, termină Facultatea de Matematică şi Fizică.

Pe timpul studiilor universitare nu a primit nici un fel de ajutor social sau material (nu a primit bursă, cămin, a platit taxele de studii în fiecare an şi nu i s-a acordat, de la serviciul social al Universității Al. I. Cuza din Iaşi, nici cartelă de masă contra-cost) din partea Statului.

Prin toate greutățile trecute, cu un tată bolnav de nervi, datorită persecuțiilor politice din 1947-1948 şi, mai ales, a trecerii averii la stat şi C.A.P., a reuşit, totuşi să termine facultatea în anul 1958. Îşi începe activitatea didactică ca profesor de fizică la Liceul Teoretic din Truseşti, județul Botoşani şi a înființat în cei 2 ani, cât a profesat, un modest laborator de fizică, dar funcționabil. Apoi, din 1960 s-a transferat la Liceul ''Nicu Gane'' din Fălticeni, pe care l-a absolvit în 1950, punând bazele a două moderne laboratoare de fizică, dotate cu materiale didactice corespunzătoare, unde şi-a desfăşurat o prestigioasă activitate de specialitate (lecții curente cu elevii, lucrări de laborator conform programei de

fizică, cercuri de fizică ale elevilor şi profesorilor din localităţile limitrofe oraşului Fălticeni).

Şi-a trecut la timp şi cu succes toate examenele de grad în fizică şi, prin perseverenţă în activitate şi, mai ales, datorită rezultatelor obţinute pe linie de învăţământ, a fost evidenţiat totodată atribuindu-i-se diferite distincţii onorifice.

Fiind considerat competent în profesie şi mereu în fruntea activităţii şcolare şi extraşcolare i s-au încredinţat şi diferite funcţii:

- şef de catedră fizică în liceu;
- responsabil de cerc pedagogic al profesorilor de fizică;
- preşedinte sau vicepreşedinte la comisiile de bacalaureat;
- preşedinte comisie la admiterea în liceu la diferite licee din judeţ;
- membru în comisia judeţeană de fixare a profesorilor pe posturile de fizică, prin concurs;
- membru în comisia de examinare şi acordare a gradelor didactice în fizică din centrul universitar Iaşi;
- metodist la obiectul fizică în cadrul Inspectoratului Şcolar Suceava timp de circa 25 de ani.

În calitate de metodist al Inspectoratului Şcolar Suceava a efectuat numeroase inspecţii de specialitate pentru acordarea gradelor didactice în fizică, a fost cooptat în diferite brigăzi de îndrumare şi control de către Inspectoratului Şcolar Suceava, a susţinut şi prezentat diferite materiale de specialitate cu ocazia diferitelor simpozioane de fizică la nivel local, judeţean şi pe ţară.

Pe linia olimpiadelor de fizică a pregătit în fiecare an de învăţământ un număr destul de reprezentativ de elevi, iar unii au fost premiaţi chiar la fazele pe ţară.

Numeroşi absolvenţi de liceu au reuşit la examenele de admitere în diferite instituţii universitare şi tehnice, devenind ulterior specialişti în diferite domenii de activitate: ingineri, medici, profesori de fizică etc.

BCU "ALEXANDRU IOAN CUZA" UNIVERSITY LIBRARY

A fost inițiatorul și realizatorul primei clase de fizică din liceu și din județ, în anul școlar 1971/1972, prin selectarea celor mai valoroși elevi din orașul Fălticeni și din localitățile apropiate acestui oraș. Prin eforturile fizice și intelectuale, depuse în toată activitatea didactică, colegul meu, Constantin Popa, s-a distins ca un profesor cu calități profesionale deosebite în activitatea didactică și de diriginte, fiind apreciat de foștii elevi din liceele unde a funcționat cât și de profesorii din jurul său.

Sunt sigur că apariția cărții ''Fizica, îndrumător metodic'' ce constituie doar o parte din activitatea sa depusă în învățământul preuniversitar, va fi apreciată și căutată, încât îi urez succes ca în viitor să scoată noi lucrări necesare dezvoltării și modernizării predării fizicii în școala românească.

Prof. Patraşcu Constantin

Liteni, Suceava

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

In memoriam

Învățătorul Dumitru Apopei

DUMITRU APOPEI s-a născut la data de 19/12/1894, în Dolheştii Mici, comuna Dolheşti, şi a decedat în satul Vămeni-Dolhasca, în ziua de 26/04/1980. Fiu de țărani, a făcut şcoala primară în Dolheştii Mici, apoi Şcoala Normală „Vasile Lupu" din Iaşi, fiind bursier şi absolvind-o în 1918. Inițial a fost învățător la Corni-Liteni, unde s-a căsătorit la 28 de ani, în 19/02/1922, cu Aneta Nemțanu, fiică de notar public şi mamă casnică (țărancă). De la şcoala Corni se transferă la Şcoala primară cu patru clase din Vămeni-Dolhasca pe care o înființează în anul şcolar 1922-1923 în propria casă, funcționând şi întreținând-o din salariu şi din propriile venituri gospodăreşti până în anul 1948, când este pensionat la 54 de ani pe motiv de boală de nervi, căpătată datorită terorii politice instaurate în acel timp de către regimul comunist.

Soția sa a moştenit după moartea bunicului său, Costache Morariu, de meserie țăran-tâmplar, 14 ha. de teren agricol şi pădure, o moară de apă pe râul Şomuzul Mare; fiul cel mare, Gheorghe, a întrerupt studiile în anul III al Facultății de Drept din Iaşi, ocupând meseria de morar-mecanic, deoarece fostul regim interzicea angajarea forței de muncă străine în moară şi gospodărie. În timpul cât a fost morar, Gheorghe Popa a cumpărat şi un tractor Lantz ce a fost folosit atât în gospodărie, cât şi la moară, în timp de secetă.

Învățătorul a avut o familie numeroasă formată din din şase copii: patru băieți şi două fete. A luptat pe front în primul război mondial, la Mărăşti, a fost rănit, iar la finele războiului i s-a acordat gradul de sublocotenent.

În cel de-al doilea război mondial a fost concentrat la Roman având gradul de căpitan în rezervă.

În 1943 şi-a trecut gradul didactic I în învăţământ, iar Inspectoratil Şcolar Judeţean Baia l-a numit responsabil al Cercului pedagogic de învăţători din plasa Lespezi.

În 1949, comuniştii l-au trecut la categoria socială chiabur, reţinându-i şi pensia pentru tot restul vieţii, trăind bolnav şi îngrijit în special de soţie şi fiica sa Eugenia (care şi-a întrerupt studiile la Şcoala Profesională de Fete din Fălticeni). Toată averea i-a fost confiscată în mod abuziv. Întrucât învăţătorul era bolnav şi în vârstă, atât soţiei, cât şi fiului său Gheorghe li s-au înscenat diferite procese, cu substrat politic, fiind condamnaţi la luni grele de detenţie, efectuate în închisorile penitenciarelor din Fălticeni şi Botoşani. Aplicându-se lupta de clasă întregii familii, copiii nu i-au fost primiţi în mod normal în licee şi facultăţi, terminându-şi studiile la vârstă târzie.

De luat aminte că aşa a trăit şi suferit inimosul învăţător în fostul regim comunist: ostracizat şi ameninţat în mod permanent că-l vor da afară din învăţământ, că-i vor confisca toată averea, iar copiii nu vor fi admişi în licee şi facultăţi. În asemenea situaţie, nervii i-au cedat şi la 54 de ani s-a îmbolnăvit şi nu a mai putut continua activitatea în calitate de cadru didactic. I s-a trecut abuziv toată averea la C.A.P. şi Stat, rămânând într-o sărăcie cruntă până la sfârşitul vieţii. A fost înmormântat alături de părinţi, fraţi, rude şi consăteni în cimitirul din satul său natal, Dolheştii Mici.

Prof. Geo Nichita

Nota Autorului
– la prima ediție –

Ca urmare, a solicitărilor unor foşti elevi, de la Liceul „Nicu Gane'' şi la îndemnul d-lui profesor Geo Nechita, de la Grupul Şcolar „Mihai Băcescu'' din Fălticeni, m-am decis să scriu această carte şi pot afirma că nu a fost deloc uşor de realizat.

Întrucât, lucrarea cuprinde toate capitolele fizicii, predate în liceu şi conform programei de fizică, a rezultat şi un număr destul de mare de pagini, fapt pentru care am divizat-o în două volume.

Primul volum conține: fenomene mecanice şi termice, iar cel de al doilea: fenomene electrice şi magnetice, optice, cuantice şi nucleare.

Pentru a veni în ajutorul rezolvitorului de probleme, am introdus, la începutul fiecărui capitol, un sumar breviar, privind: definiții ale mărimilor fizice şi a unităților corespunzătoare, a legilor şi principiilor fizicii, a unor formule şi grafice.

Apoi, s-a trecut la rezolvarea logică şi metodică a problemelor, ținându-se seama şi de gradul lor de dificultate, în soluționare.

Selectarea problemelor, în cele două volume, s-a făcut din diferite culegeri, manuale de liceu, teste de fizică, revista „Fizică şi Chimie'', precum şi un număr apreciabil, concepute personal şi care unele, au fost propuse, de-a lungul anilor, la diferite olimpiade de fizică (locală, județeană şi pe țară) .

În cadrul rezolvărilor de problemelor, veți constata, că unele, le-am rezolvat prin mai multe variante, recomandând

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

rezolvitorului, dacă doreşte, să le folosească şi la rezolvarea, altor probleme din diferite publicaţii.

Menţionez, că majoritatea problemelor, au fost rezolvate în cadrul lecţiilor şi cercurilor de fizică, pe care le-am condus în toată activitatea didactică, depusă la liceele la care am funcţionat.

Consider, că lucrarea va fi de un real ajutor elevilor de liceu, acelora care îşi vor trece examenul de bacalaureat, candidaţilor la admitere în învăţământul superior, precum şi colegilor mei, ce predau fizica la nivel de liceu.

Ca orice carte, ce apare în public, este supusă analizei şi aprecierilor şi din aceste considerente, rog pe cei ce constată, anumite lacune, să mi le comunice, încât la o nouă apariţie, a lucrării, să fie publicată şi erata cuvenită.

Constantin Popa

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cuprins

1. Fenomene mecanice 1
2. Probleme rezolvate 55
3. Fenomene termice 223
4. Probleme rezolvate 250

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

FENOMENE MECANICE

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

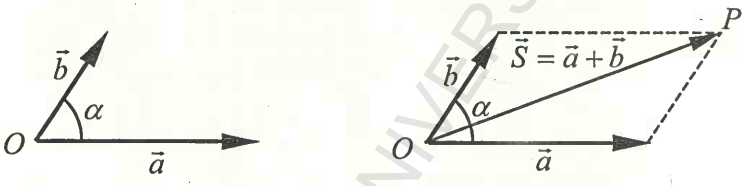
I. BREVIAR

I.1. - Principalele operaţiuni cu vectori.

I.1.1.

1. Adunarea vectorilor.

Metoda paralelogramului este folosită la compunerea a doi vectori concurenţi: Suma a doi vectori concurenţi este dată de diagonala paralelogramului construit de cei doi vectori, componenţi ca laturi, având origine comună.

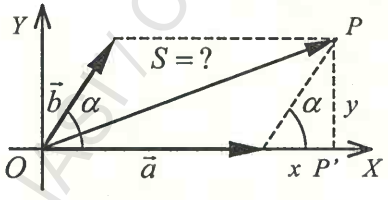


Modulul vectorului sumă $\vec{S}$ se află cu relaţia:

$$\left|\vec{S}\right| = S = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

Modulul vectorului sumă $\vec{S}$ depinde de: modulul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, cât şi de unghiul α dintre vectori .

Calcularea modulului vectorului sumă $\vec{S}$.



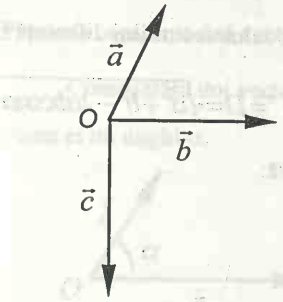
Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul OPP':

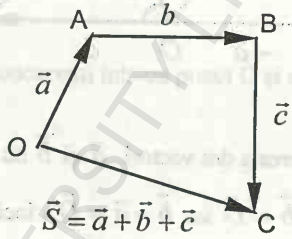
$S^2 = (a + x)^2 + y^2 = a^2 + 2ax + x^2 + y^2$.

Cum $x = b\cos\alpha$ şi $x^2 + y^2 = b^2$, obţinem:

$S^2 = a^2 + 2ab\ \cos\alpha + b^2 \rightarrow S = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$

Metoda poligonului este folosită la compunerea mai multor vectori concurenți: Suma mai multor vectori este dată de linia de închidere a conturului poligonal construit cu vectorii componenți.



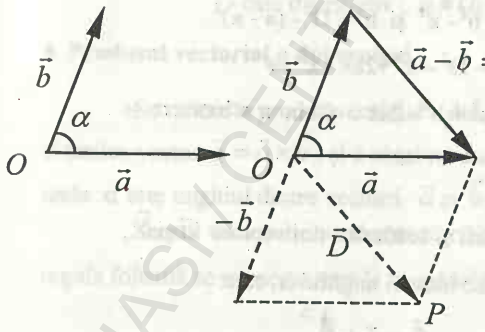


Proprietățile sumei vectoriale:

- comutativă: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- asociativă: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

I.1.2.

2. Scăderea vectorilor



$\vec{a} \rightarrow$ vector descăzut

$\vec{b} \rightarrow$ vector scăzător

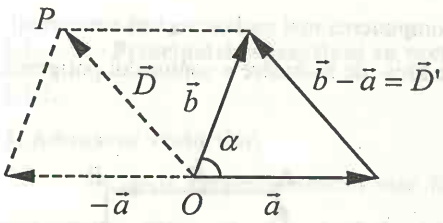
$\vec{D} \rightarrow$ vector diferență

Modulul vectorului diferență $\vec{D}$:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$$

Modulul vectorului diferență $\vec{D}$ depinde de modulele vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ cât și de unghiul α dintre ei.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



$\vec{a}$ → vector scăzător

$\vec{b}$ → vector descăzut

$\vec{D}'$ → vector diferenţă

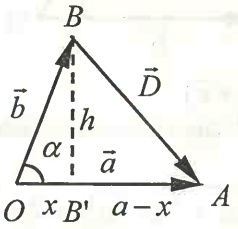
Modulul vectorului diferenţă $\vec{D}'$:

$$D'=D=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$$

Scăderea a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ nu este comutativă:

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{D}$ iar $\vec{b}-\vec{a}=\vec{D}'$, încât $\vec{D}'=-\vec{D}$

Calcularea modulului vectorului diferenţă $\vec{D}$



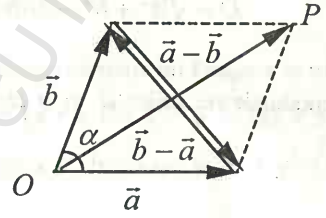
Aplicăm teorema lui Pitagora : $h^2 = b^2 - x^2$ şi $h^2 = D^2 - (a - x)^2$

$b^2 - x^2 = D^2 - (a - x)^2 \rightarrow b^2 - x^2 = D^2 - a^2 + 2ax - x^2 \rightarrow$

$\rightarrow b^2 = D^2 - a^2 + 2ax \rightarrow D^2 = a^2 + b^2 - 2ax$. Cum $x = b\cos\alpha \rightarrow$

$\rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

Figura geometrică a adunării şi scăderii a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, concurenţi într-un punct O şi care fac între ei unghiul α, este:



$\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}$

$\vec{D}=\vec{a}-\vec{b}$ $\quad$ $\vec{D}'=-\vec{D}$

$\vec{D}'=\vec{b}-\vec{a}$

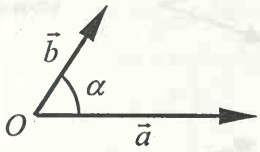
BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$S = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab}$ iar $D = D' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}$

Ambele module a vectorilor $\vec{S}$ şi $\vec{D}$, respectiv $\vec{D}'$ depind de modulele vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ cât şi de unghiul α dintre ei.

3. Produsul scalar a doi vectori.

Considerăm doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, concurenţi într-un punct O şi care fac între ei un unghi α.



Produsul scalar este o mărime scalară, egală cu produsul modulelor vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ şi cosinusul unghiului α dintre ei: $P = \vec{a} \bullet \vec{b} = ab\cos\alpha$

Proprietăţile produsului scalar :

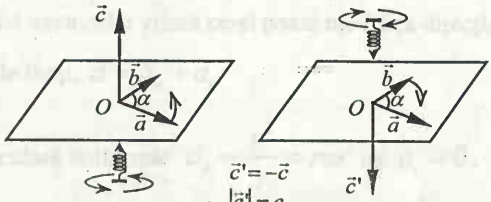
- este comutativ : $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ şi

- este distributiv : $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$

4. Produsul vectorial a doi vectori.

Se numeşte produs vectorial a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, notat cu $\vec{a}x\vec{b}$, un al treilea vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, şi a cărui modul se află cu relaţia: $c = ab\sin\alpha$, unde α este unghiul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Sensul vectorului produs vectorial $\vec{c}$ se determină cu burghiul iar regula folosită se numeşte *regula burghiului.*



BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Proprietățile produsului vectorial:

- necomutativ: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
- distributiv: $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\,.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I.2. CINEMATICA

Studiază mişcarea corpurilor (a punctelor materiale) fără a ţine seama de cauzele mişcărilor (forţe).

I.2.1. Mărimile fizice în cinematică:

- viteza medie

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

vectorial: $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

- viteza momentană

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

vectorial: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- acceleraţia medie

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

vectorial: $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

- acceleraţia momentană

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

vectorial: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

- acceleraţia normală $\vec{a}_n$ şi acceleraţia tangenţială $\vec{a}_t$ apar într-o mişcare curbilinie, datorită vectorului viteză ce-şi poate modifica direcţia sau modulul, într-un interval de timp: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$

- în mişcarea circulară uniformă: $a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$ iar $a_t = 0$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I.2.2 Diferite tipuri de mişcări şi legi

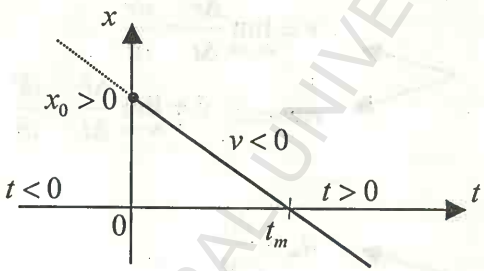
a) Mişcarea rectilinie uniformă:

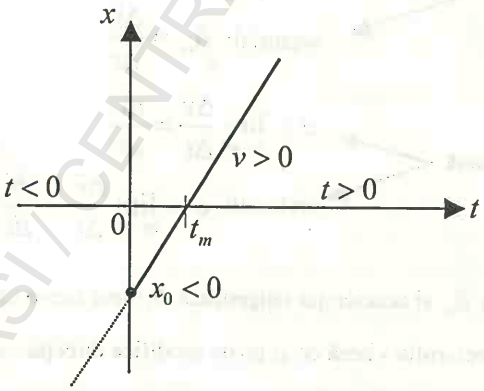
- $\vec{v} = const, \quad \vec{a} = 0$
- viteza medie coincide cu cea momentană: $v_m = v$
- ecuaţia mişcării: $x = x_0 + v(t - t_0)$

$x = x_0 + vt$ când $t_0=0$

$x = vt$ când $t_0=0$ şi $x_0=0$

Coordonata x (spaţiu) după 0x este o funcţie liniară de timp (adică un polinom de gradul întâi) şi grafic se va reprezenta printr-o dreaptă:





În fizică t < 0 nu există şi se consideră un timp trecut şi din acest motiv porţiunea din curbă (dreapta) este punctată. În fizică interesează numai partea din curbă pentru care t > 0.

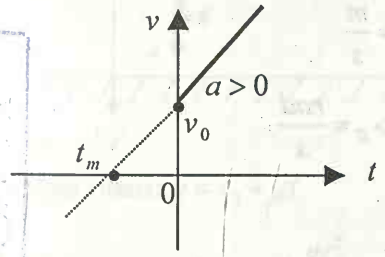
BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

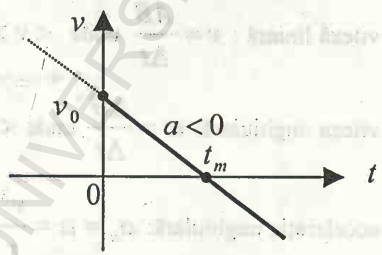
b) Mişcarea rectilinie uniformă variată. $\vec{a} = const$

- vectorul acceleraţiei medii $\vec{a}_m$, coincide cu vectorul acceleraţiei momentane $\vec{a}$, adică $\vec{a}_m = \vec{a}$ sau $a_m = a$.

- legea vitezei: $v = v_0 + a(t - t_0)$ $\begin{cases} v = v_0 + at & \text{când } t_0=0 \\ v = at & \text{când } t_0=0 \text{ şi } v_0=0 \end{cases}$

- viteza în mişcarea rectilinie uniform variată este o funcţie liniară de timp (adică un polinom de grad întâi) şi grafic va fi o linie dreaptă:

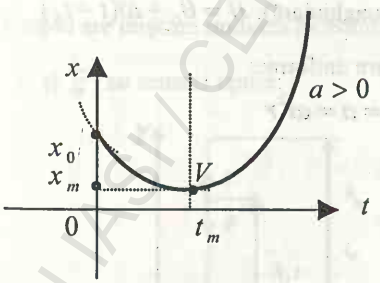


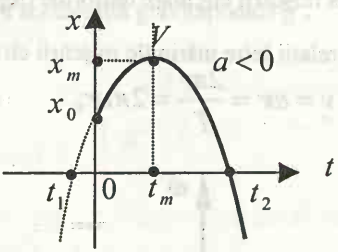


- viteza medie $v_m = \dfrac{v_0 + v}{2}$

- legea mişcării: $x = x_0 + v_0(t - t_0) + \dfrac{a}{2}(t - t_0)^2$.

Coordonata x (spaţiu) după 0x este o funcţie pătratică de timp (adică un polinom de gradul doi) şi grafic va fi o parabolă:





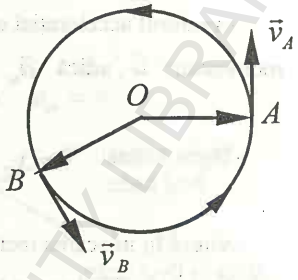
- coordonatele vârfului parabolei:

$$t_m = \frac{-v_0}{a} \quad \text{şi} \quad x_m = x_0 - \frac{v_0^2}{2a}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- formula lui Galileo Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

c) Mişcarea circulară uniformă.



- traiectoria un cerc:
- vectorul viteză liniară $\vec{v}$ şi vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ sunt constanţi în modul.
- mişcare periodică.

- viteză liniară : $v = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\Delta t}$ unde $< v >_{SI} = \frac{m}{s}$

- viteza unghiulară: $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ unde $< \omega >_{SI} = \frac{rad}{s}$

- acceleraţia unghiulară: $a_n = a = \frac{v^2}{r}$

- acceleraţia tangenţială: $a_t = 0$

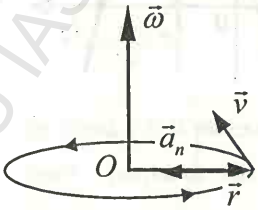
- perioada mişcării: T

- frecvenţa de rotaţie: $\upsilon = \frac{1}{T}$ unde $< \upsilon >_{SI} = \frac{1}{s} = s^{-1}$

- legea mişcării circulare uniforme (legea unghiulară): $\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$

- alte relaţii între mărimile mişcării circulare uniforme:

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi\upsilon r; \qquad a_n = a = \omega^2 r$$

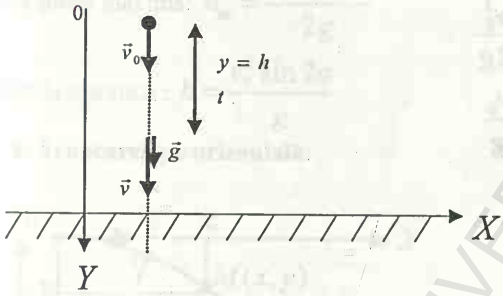


BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

d) Mişcarea în câmpul gravitaţional.

1. Aruncarea pe verticală de sus în jos cu $\vec{v}_0$.

- corpul are mişcare rectilinie uniform variată, cu acceleraţia gravitaţională $\vec{g}$ iar $\vec{v}$ şi $\vec{g}$ au acelaşi sens.



- legea vitezei: $v = v_0 + gt$

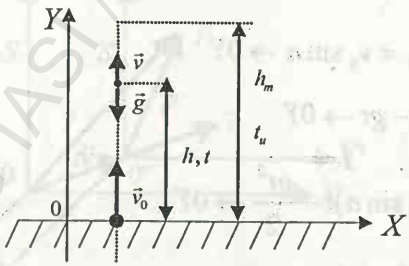
- legea mişcării: $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$

- formula Galileo – Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2gh$

2. Aruncarea pe verticală de jos în sus cu $\vec{v}_0$.

Corpul are mişcare uniform încetinită; cu acceleraţia gravitaţională $\vec{g}$.

$\vec{v}$ şi $\vec{g}$ au sensuri opuse:



- legea vitezei: $v = v_0 - gt$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- legea mişcării : $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$

- formula Galileo - Galilei: $v^2 = v^2{}_0 - 2gh$

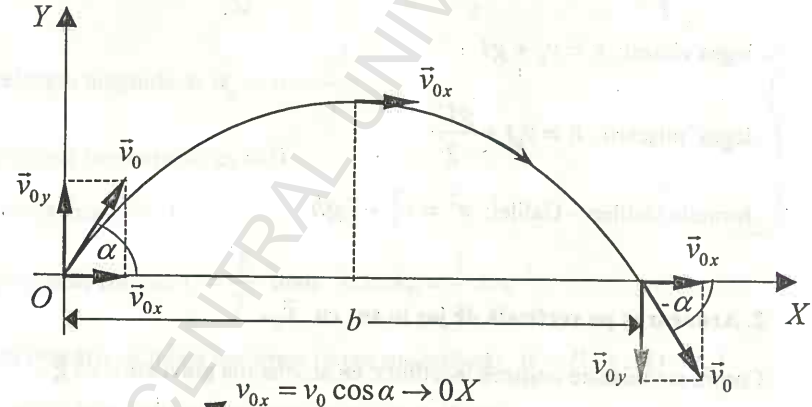
- timpul de urcare: $t_u = \frac{v_0}{g}$

- înălţimea maximă: $h_m = \frac{v_0^2}{2g}$

- timpul total: $t = 2t_u = 2\frac{v_0}{g}$

unde: $t_u = t_c$

3. Aruncarea oblică:



- viteza iniţială v_0 → $v_{0x} = v_0 \cos\alpha \rightarrow 0X$

- viteza iniţială v_0 → $v_{0y} = v_0 \sin\alpha \rightarrow 0Y$

- legea vitezei: $v_y = v_0 \sin\alpha - gt \rightarrow 0Y$

- legea mişcării : $y = h = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \rightarrow 0Y$

- formula Galileo - Galilei: $v_y{}^2 = v_{0y}^2 - 2gy$

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

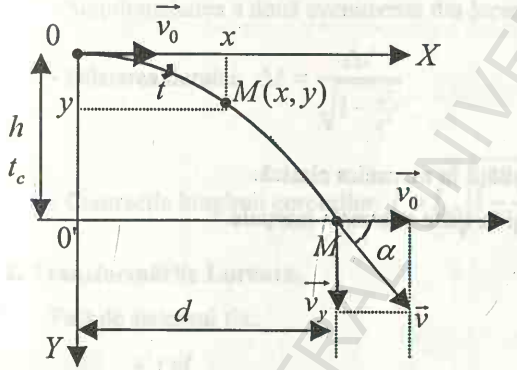
- ecuația traiectoriei: $y = xtg\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$ (parabola)

- timpul de urcare: $t_u = \dfrac{v_0 \sin \alpha}{g}$

- înălțimea maximă: $h_m = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

- bătaia teoretică : $b = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

4. Aruncarea pe orizontală:



$x = v_0 t \rightarrow 0X$

$y = \dfrac{gt^2}{2} \rightarrow 0Y$

ecuația traiectoriei:

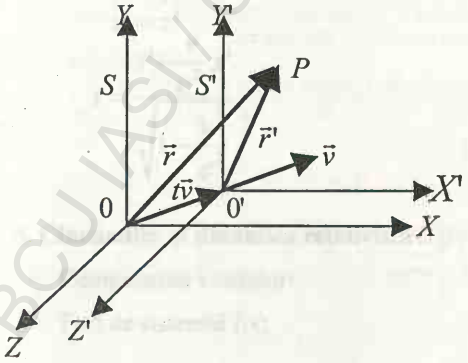
$y = \dfrac{g}{2v_0^2} x^2$ (parabolă)

- timpul de cădere:

$t_c = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

- distanța : $0'M = d = v_0 t_c = v_0 \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

I.2.3. Transformările Galileo- Galilei:



a) față de sistemul imobil S:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t' & \text{(vectorial)} \\ t = t' \end{cases}$$

b) față de sistemul mobil S':

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t & \text{(vectorial)} \\ t' = t \end{cases}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În funcție de coordonatele x,y,z şi t,cât şi x',y',z' şi t' :

a) față de sistemul imobil S:

$$x = x' + v_x t'$$

$$y = y' + v_y t'$$

$$z = z' + v_z t'$$

$$t = t'$$

b) față de sistemul mobil S':

$$x' = x - v_x t'$$

$$y' = y - v_y t'$$

$$z' = z - v_z t'$$

$$t = t'$$

Enunțarea principiului relativității în mecanica clasică:

Legile mecanicii sunt aceleaşi în toate sistemele inerțiale.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I.2.4 Noţiuni de teoria relativităţii restrânse.

1. Enunţarea postulatelor lui Einstein:

a) Fenomenele fizice se desfăşoară identic în toate sistemele de referinţă inerţiale în condiţii iniţiale identice sau : Formularea legilor fizice este aceiaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale.

b) Viteza luminii în vid este aceiaşi în toate sistemele de referinţă inerţiale şi în toate direcţiile, adică nu depinde de mişcarea sursei de lumină sau a observatorului.

Consecinţele ce rezultă din postulatele lui Einstein:

- Simultaneitatea a două evenimente din locuri diferite este relativă.

- Dilatarea duratei: $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

- Contracţia lungimii corpurilor: $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

2. Transformările Lorentz.

Faţă de sistemul fix:

$$x = \frac{x'+vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Faţă de sistemul mobil:

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

3. Cinematica şi dinamica relativistă .

Compunerea vitezelor:

Faţă de sistemul fix:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' \cdot v^2}{c^2}} \qquad u_y = \frac{u_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u_x' \cdot v^2}{c^2}} \qquad u_z = \frac{u_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u_x' \cdot v^2}{c^2}}$$

Pentru v<<c şi u<<c, se regăsesc formulele de compunere a vitezelor din mecanica clasică.

- Masa unui corp în mecanica relativistă: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

unde $m_0 \rightarrow$ este masa de repaus

$v \rightarrow$ viteza corpului apropiată de viteza luminii

$c \rightarrow$ viteza luminii în vid

- Impulsul relativist sau legea fundamentală a dinamicii relativiste:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

- Legătura dintre masă şi energie:

$\Delta W = \Delta m c^2$ unde $\Delta W = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0)c^2$.

$W = mc^2 \rightarrow$ energia totală.

$W_0 = m_0 c^2 \rightarrow$ energia de repaus.

$W_c = W - W_0 \rightarrow$ energia cinetică.

Relaţia: $\Delta W = \Delta m c^2 \rightarrow$ constituie expresia de generalizare a energiei şi este valabilă pentru orice formă de energie;

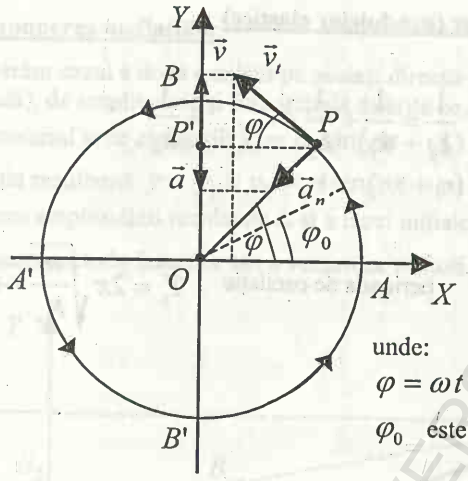
Variaţiei masei Δm întotdeauna îi corespunde o variaţie de energie:

$\Delta W = \Delta m c^2$.

I.2.5 Mişcarea oscilatorie. Compunerea oscilaţiilor. Unde elastice.

1. Mărimi fizice: perioada, frecvenţa, fază , elongaţie, amplitudine, viteză, acceleraţie, energia.

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



unde:

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ este faza totala, iar

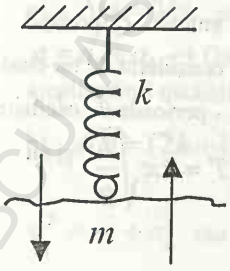
φ_0 este faza initiala la $t_0 = 0$.

După 0y:
$$\begin{cases} y = A\sin\varphi t = A\sin(\omega t + \varphi_0) \\ v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y \end{cases}$$

După 0x:
$$\begin{cases} x = A\cos\varphi = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) \\ a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \ _0) = -\omega^2 x \end{cases}$$

2. Aplicații ale mișcării oscilatorii: Pendulul elastic și pendulul gravitațional.

1. Pendulul elastic



$$K = m\omega^2, T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

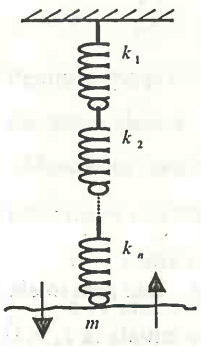
$$E = E_p + E_c = \frac{KA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

$$E_p = \frac{Ky^2}{2}; E_c = \frac{k}{2}(A^2 - y^2)$$

BCU ARGEȘ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- **a) legarea resorturilor (pendulelor elastice)**

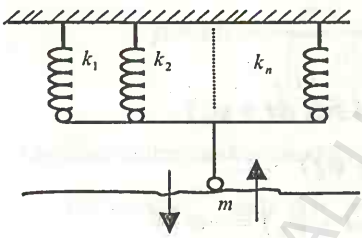
a) Serie



$$\frac{1}{k_s}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+.....+\frac{1}{k_n}$$

perioada de oscilație $T_s=2\pi\sqrt{\frac{m}{K_s}}\rightarrow$

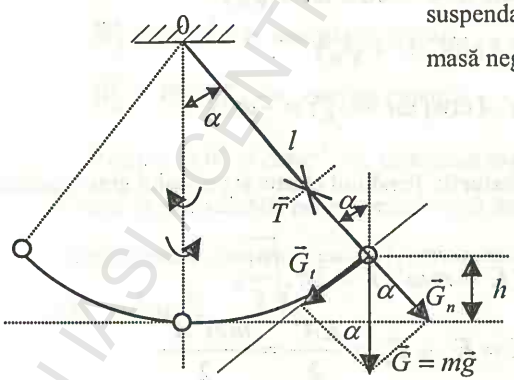
b) paralel



$$k_p=k_1+k_2+.....+k_n$$

perioada de oscilație $T_p=2\pi\sqrt{\frac{m}{K_p}}\rightarrow$

2. Pendulul gravitational – un corp idealizat de masă m, suspendat de un fir inextensibil şi de masă neglijabilă.



$$G=mg,$$

$$G_t=mg\sin\alpha\approx mg\alpha$$

Pentru α mici (<5°), atunci G_t poate fi considerat de tip elastic.

- perioada de oscilație: $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ şi nu depinde de masa m a pendulului.

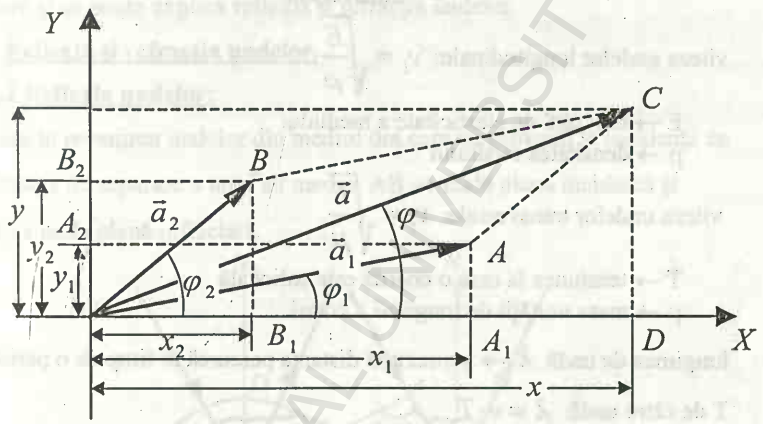
BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3. Compunerea oscilaţiilor.

Considerăm cazul a două oscilaţii pe aceiaşi direcţie, aceiaşi pulsaţie (perioadă), de amplitudine şi fază iniţială diferite ce acţionează asupra unui punct material şi de elongaţii: $y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ şi $y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$.

Elongaţia rezultantă $y = y_1 + y_2 = A\sin(\omega t + \varphi)$.

La aflarea amplitudinii rezultante A şi a fazei iniţiale φ a oscilaţiei rezultante se foloseşte metoda fazorilor sau a vectorilor rotitori.



$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}$ iar $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ unde a este amplitudinea oscilaţiei rezultante şi $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ diferenţa de fază

$$tg\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2} \rightarrow \text{faza iniţială a oscilaţiei rezultante}$$

Cazuri particulare:

a) $\Delta\varphi = 2k\pi$ unde $k = 0,1,2.....$, obţinem:

$a = a_1 + a_2 \rightarrow$ Oscilaţia rezultantă are amplitudinea egală cu suma amplitudinii oscilaţiilor componente. Oscilaţiile sunt în fază.

b) $\Delta\varphi = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ unde $k = 0,1,2.....$, obţinem:

$a^2 = a_1^2 + a_2^2$ sau $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Oscilațiile sunt în cvadratură de fază.

4. Unde elastice.

Undă → transmiterea unor perturbații într-un mediu material. În cazul când în mediu perturbant iau naștere forțe elastice, atunci unda se numește elastică.

Unde elastice → longitudinale
Unde elastice → transversale

viteza undelor longitudinale: $v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

E → modulul de elasticitate a mediului
ρ → densitatea mediului

viteza undelor transversale: $v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

T → tensiunea la care o coardă este solicitată
μ → masa unității de lungimii a corzii

- lungimea de undă $\lambda \rightarrow$ reprezintă distanța parcursă în timp de o perioadă T de către undă: $\lambda = v \cdot T$

Ecuația undei plane:

- Unda plană → suprafețele de undă sunt plane

$$u = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{X}) = A\sin[\omega(t - \frac{x}{v})] \text{ pentru } \varphi_0 = 0$$

$$u = A\sin(\omega t - \frac{x}{v} + \varphi_0) \quad \text{pentru } \varphi_0 \neq 0$$

- Diferența de drum Δx dintre doi oscilatori are formula: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$

Cazuri particulare:

a) Dacă : $\Delta x = 2k\frac{\lambda}{2}$, atunci , $\Delta\varphi = 2k\pi \rightarrow$

oscilatorii sunt în fază

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) Dacă : $\Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, atunci, $\Delta\varphi = (2k+1)\pi \rightarrow$ oscilatorii sunt în opoziţie de fază

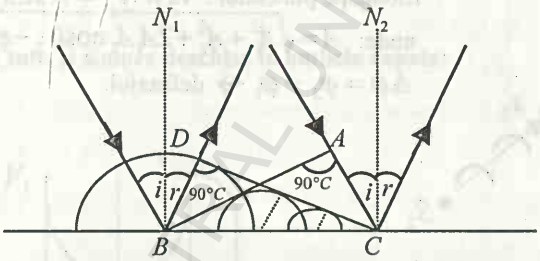
Principiul lui Huygens: Orice punct de pe o suprafaţă de undă poate fi considerat ca un nou centru de perturbaţie de la care se propagă mai departe unde sferice secundare (elementare).

Pe baza principiului Huygens se construiesc fronturile de undă: circulare sau liniare şi se poate explica reflexia şi refracţia undelor.

4.1 Reflexia şi refracţia undelor.

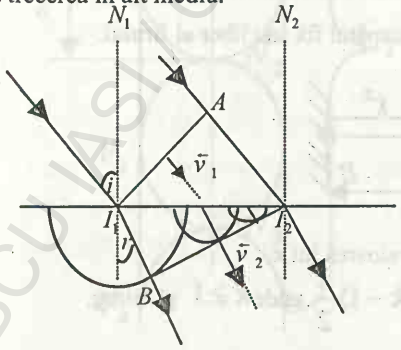
4.1.1 Reflexia undelor:

constă în revenirea undelor din mediul din care au provenit la incidenţa cu suprafaţa de separare a unui alt mediu. AB → unda plană incidentă şi CD → unda plană reflectată.



Legea reflexiei: unghiul de incidenţă i este egal cu unghiul de reflexie r.

4.1.2 Refracţia undelor: Schimbarea direcţiei de propagare a undei incidente la trecerea în alt mediu.



$I_1A \rightarrow$ unda plană incidentă şi

$I_2B \rightarrow$ unda plană reflectată

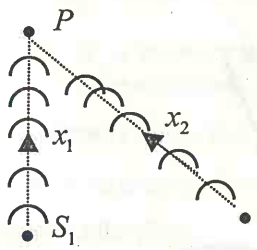
BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- legea refracției: $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

Reflexia undelor
- cu schimbare de sens a elongației
  - unda la întoarcere pierde $\frac{\lambda}{2}$
- și fără schimbare de sens a elongației
  - unda la întoarcere nu pierde $\frac{\lambda}{2}$

4.2. Difracția undelor: abaterea unei unde de la direcția inițială de propagare, la trecerea pe lângă obstacole și la traversarea fantelor

4.3. Interferența undelor: suprapunerea neperturbată în același loc, dintr-un mediu a două sau mai multe unde, de aceiași lungime de undă și aceiași pulsație.



Elongația punctului P va fi : $y_p = A\sin(\omega t + \varphi)$

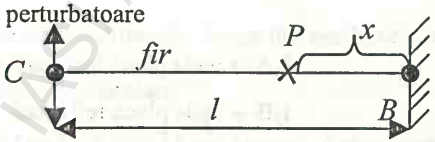
unde: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ iar

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \rightarrow$ defazajul.

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \rightarrow \text{defazajul } \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$

4.4. Unde staționare: Suprapunerea undei incidente produsă de o sursă perturbatoare și a undei reflectate, la capătul fix sau liber al firului.

Sursa perturbatoare



Punctul: P va fi ventru sau nod după valoarea lui x.

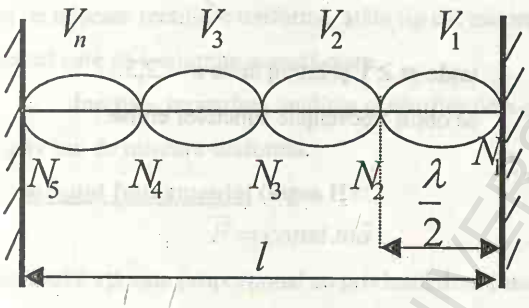
Punctul: P este ventru când: $x_v = (2k-1)\frac{\lambda}{2}$ unde $k \geq 1$ și întreg.

BUJK STATE CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Punctul: P este nod când: $x_n = k\frac{\lambda}{2}$ unde $k \geq 0$ şi întreg.

4.4.2 APLICAȚII

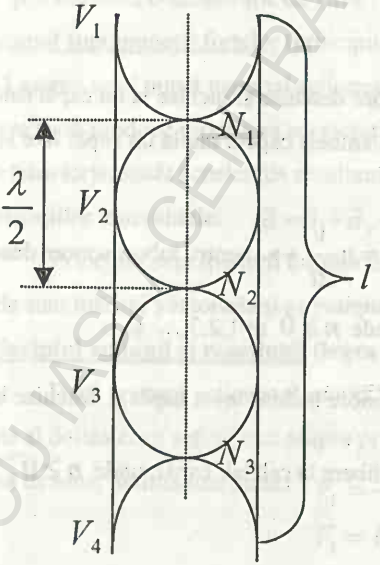
a). Pentru un fir fixat la ambele capete:



Din desen: $l = n\frac{\lambda}{2}$

unde $n \rightarrow$ nr. de fuse

b). Pentru tuburi sonore deschise la ambele capete:



Din desen: $l = n\frac{\lambda_n}{2}$, unde

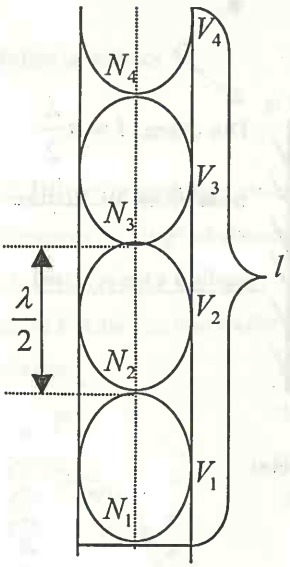
$$\lambda_n = vT_n = v\frac{1}{\upsilon_n}$$

$$2l = n\frac{v}{\upsilon_n} \rightarrow \upsilon_n = n\frac{v}{2l}$$

unde $n \geq 0$, adică n=1,2,3,.... se obțin frecvențele sunetelor emise.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c). Pentru tuburi sonore închise la un capăt şi deschise la celălalt capăt:



Din desen: $l=(2n-1)\frac{\lambda_n}{4}$

unde: $\lambda_n = vT_n = \frac{v}{\upsilon_n}$ $\Big\}\rightarrow \upsilon_n = \frac{v(2n-1)}{4l}$,

unde $n \geq 1$ şi întreg unde n=1,2,3.....

se obţin frecvenţele sunetelor emise.

Concluzii:

Formulele de la tuburile sonore deschise şi închise la un capăt sunt valabile şi la coardele sonore libere la ambele capete sau la un capăt fixe şi la celălalt libere .

Cele două formule sunt: $\upsilon_n = n\frac{v}{2l} \rightarrow$ pentru tuburi sonore deschise sau coarde libere la ambele capete, unde $n \geq 0$ n=1,2,3,... şi

$\upsilon_n = (2n-1)\frac{v}{4l} \rightarrow$ pentru tuburi sonore închise la un capăt şi deschise la celălalt sau coarde fixe la un capăt şi libere la celălalt capăt, unde $n \geq 0$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I.3 DINAMICA

Studiază mişcarea corpurilor (a punctelor materiale) ţinându-se seama de cauzele ce produc aceste mişcări (forţe).

Definiţii:

- **Principiul inerţiei (legea I):** un punct material îşi menţine starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă, atâta tip cât asupra sa nu acţionează alte corpuri care să-i schimbe această stare.

Inerţia – reprezintă tendinţa corpurilor de a-şi păstra starea de repaus relativ sau de mişcare uniformă.

- **Principiul fundamental (legea II):**

$$\vec{F} = const.m\vec{a}$$

Vectorul forţă este proporţional cu produsul dintre masă şi vectorul acceleraţie.

Dacă toate mărimile se exprimă în S.I. atunci const=1, iar principiul fundamental (legea II) devine: $\vec{F} = m\vec{a}$ (vectorial) sau $F = ma$

1N=1Kg•m/s. Newton este forţa care acţionează asupra unui corp cu masa de 1kg şi îi imprimă o acceleraţie de $1m/s^2$.

Principiul suprapunerii forţelor (principiul independenţei acţiunii forţelor): Dacă asupra unui punct material acţionează simultan mai multe forţe, atunci fiecare forţă produce propria sa acceleraţie, în mod independent de prezenţa celorlalte forţe, încât acceleraţia rezultantă este egală cu suma vectorială a acceleraţiilor individuale: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$

Principiu suprapunerii forţelor ne arată că forţele şi acţiunile produse de ele sunt mărimi vectoriale şi se compun după regula paralelogramului.

- **Principiul acţiunii şi reacţiunii (legea III):**

Dacă un corp acţionează asupra altui corp cu o forţă, numită acţiune, cel de al doilea corp acţionează asupra primului cu o forţă egală în modul şi opusă ca sens, numită reacţiune: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (vectorial)$

$$F_1 = F_2 \quad (\hat{i}n \ \ modul)$$

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I.3.1 Tipuri de forțe în mecanică

a) Forța centripetă. Forța centrifugă

$$\vec{F}_{cp} = m\vec{a}_n = -m\omega^2\vec{r} \quad (vectorial)$$

$$F_{cp} = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r} \quad (în \ \ modul)$$

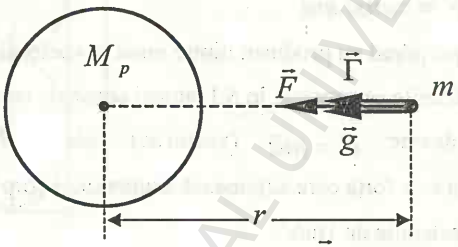
$$\vec{F}_{cf} = -\vec{F}_{cf} = -m\vec{a}_n = -m\omega^2\vec{r} \quad (vectorial)$$

$$F_{cf} = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r} \quad (în \ \ modul)$$

b) Forța atracției universale (legea lui Newton)

$F = k\frac{m_1 m_2}{r}$ $(în \ \ modul)$ unde k = 6,6•10^{-11} Nm^2/kg^2 →constanta atracției universale

- Câmp gravitațional:



Intensitatea câmpului gravitațional $\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$ $(vectorial)$

$\Gamma = \frac{F}{m} = k\frac{M_p}{r^2}$ (în modul). Cum $g = k\frac{M_p}{r^2}$, *rezultă*

$\Gamma = g \rightarrow$ Sunt mărimi fizice diferite, cu unități în S.I. diferite, dar au

$\downarrow \quad \downarrow$

N/kg m/s^2 aceiași valoare numerică într-un punct din câmpul gravitațional.

Accelerația gravitațională variază cu h după relația:

$$g_h = \frac{gR_p^2}{(R_p + h)^2}$$ unde: $g \rightarrow$ accelerația gravitațională la suprafața

Pământului, $R_p \rightarrow$ raza Pământului și $h \rightarrow$ altitudinea unde se calculează g_h.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) Greutatea corpului:

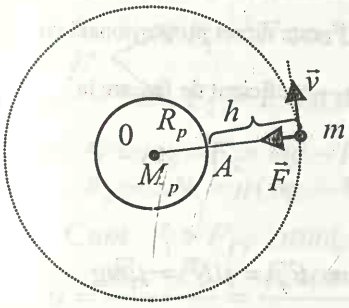
$\vec{G} = m\vec{g}$ $(vectorial)$

$G = mg$ $(în\ \ modul)$

Greutatea corpului reprezintă forţa cu care Pământul îl atrage.

Sateliţi → naturali (Luna, Pământul etc.)

Sateliţi → artificiali (lansaţi de om)



Pentru ca un corp de masă m să devină satelit artificial trebuie ca:

$F_{cf} = F \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{mv^2}{R_p + h} = K\frac{mM_p}{(R_p + h)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow v^2 = \frac{KM_p}{R_p + h}.$$ Cum: $KM_p = gR_p^2$, atunci

$$v^2 = \frac{gR_p^2}{R_p + h} \rightarrow, v = R_p\sqrt{\frac{g}{R_p + h}}$$, viteza satelitului.

$$T = \frac{2\pi(R_p + h)}{v} \rightarrow$$ perioada de rotaţie.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow$$ viteza unghiulară

$$n = \frac{t}{T} \rightarrow$$ nr. de rotaţii a satelitului în timpul t.

La altitudinea h mare, greutatea corpului G scade, deoarece acceleraţia gravitaţională scade cu creşterea lui h, conform relaţiei:

$$g_h = \frac{g_p R_p^2}{(R_p + h)^2}.$$ Greutatea corpului de masă m, aflat la înălţimea

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(altitudinea) h se calculează cu formula : $G_h = mg_h = m\frac{g_p R_p^2}{(R_p + h)^2}$.

unde m→ masa corpului care are valoare constantă,
g_p→ accelerația gravitațională la suprafața Pământului care are valoarea de aproximativ 9,8 m/s^2,
R_p→ raza Pământului de aproximativ 6400km
h→ altitudinea (înălțimea) la care s-ar afla corpul de masă m față de suprafața Pământului.

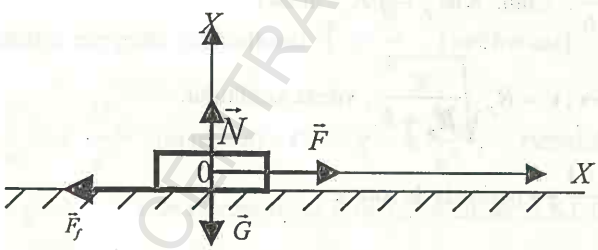
d) **Forța de frecare de alunecare** apare la alunecarea unui corp pe suprafața altui corp: $F_f = \mu N$ adică forța de frecare F_f este direct proporțională cu forța normală N pe suprafața de mișcare iar μ→ coeficient de frecare la alunecare.

1) Mișcarea corpului pe planul orizontal:

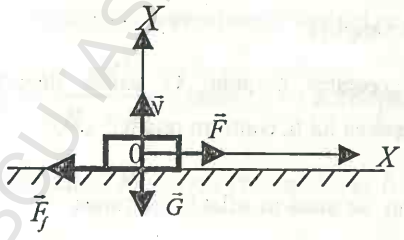
a) Mișcarea uniformă (v=const,a=0)

Mișcarea fiind uniformă: $F = F_f$ și cum $F_f = \mu N = \mu mg$,

obținem: $F = \mu mg$, unde F reprezintă modulul forței motoare.



b) Mișcarea uniform accelerată (a>0)



Întrucât: $F > F_f$, *atunci* :

$F - F_f = ma \rightarrow$

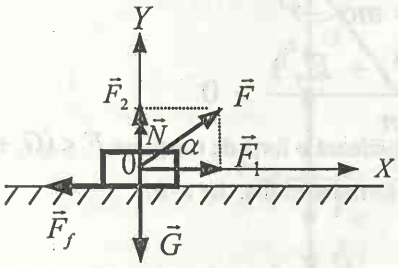
$\rightarrow F - \mu mg = ma \rightarrow$

$\rightarrow a = \frac{F - \mu mg}{m} \rightarrow$

accelerația mișcării.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) Mişcarea rectilinie uniform accelerată, când F face un unghi α cu direcţia orizontală.

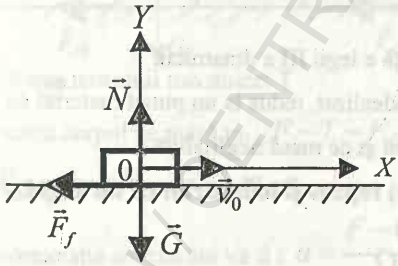


$$F \begin{cases} F_1 = F\cos\alpha \rightarrow 0X \\ F_2 = F\sin\alpha \rightarrow 0Y \end{cases}$$

$$N = mg - F_2 = mg - F\sin\alpha$$
$$F_f = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$$

$$Cum\ \ F_1 > F_f,\ \ atunci\ \ \ F_1 - F_f = ma.$$
$$a = \frac{F_1 - F_f}{m} = \frac{F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)}{m}$$

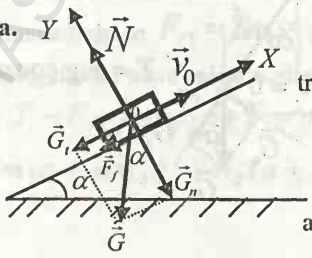
d) Mişcarea rectilinie uniform încetinită, când $\vec{F} = 0$.



$$0 - F_f = ma$$
$$-\mu mg = ma \rightarrow$$
$$\rightarrow a = -\mu g \rightarrow \text{ acceleraţia mişcării uniform încetinite}$$

2.) <u>**Mişcarea corpurilor pe planul înclinat cu**</u> $\vec{F}_f \neq 0$

a) Urcarea.



Dacă se aruncă corpul şi forţa de tracţiune $\vec{F} = 0$, atunci putem scrie:

$$0 - (G_t + F_f) = ma \rightarrow$$
$$-g(\sin\alpha + \mu\cos\mu) = a \rightarrow$$

acceleraţia mişcării uniform încetinite.

BCU "LUCIAN BLAGA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

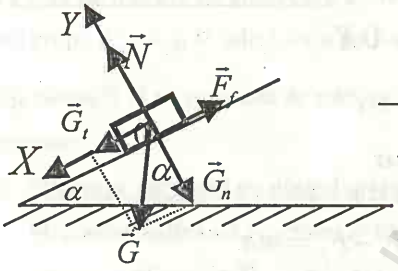
Dacă asupra corpului acționează forța de tracțiune $F > G_t + F_f$ atunci, mișcarea este uniform accelerată:

$$F - (G_t + F_f) = ma \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{F - (G_t + F_f)}{m} > 0$$

Dacă asupra corpului acționează o forță de tracțiune $F < (G_t + F_f)$, atunci, mișcarea corpului este uniform încetinită, iar a<0.

b) Coborârea.



Întrucât $G_t > F_f$, atunci

$$G_t - F_f = ma \rightarrow$$

$$\rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \rightarrow$$

$$\rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu mg\cos) \rightarrow$$

accelerația la coborâre

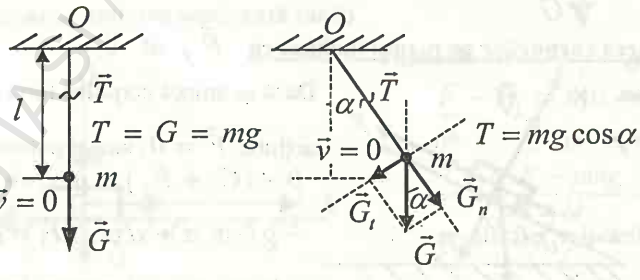
Dacă $G_t = F_f$, atunci mișcarea este uniformă (v=const.,a=0) și avem: $mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha \rightarrow \mu = tg\alpha$ unde μ este coeficientul de frecare iar α unghiul de frecare.

e) <u>Forțe de tensiune mecanică</u>

Apar în fire, cabluri, tije ca o consecință a legii III a dinamicii.

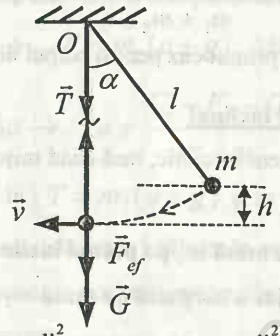
1) <u>Pendulul gravitațional:</u> Un corp, idealizat, redus la un punct material de masă m, suspendat de un fir inextensibil și de masă neglijabilă.

a) repaus și în poziția de echilibru b) repaus și îndepărtat cu un unghi α



BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

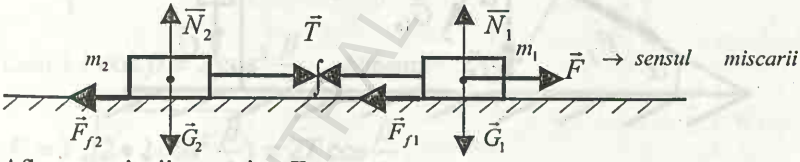
c) în mişcare prin poziţia de echilibru:



$T = F_{cf} + G = \frac{mv^2}{l} + mg = m(\frac{v^2}{l} + g) \rightarrow \quad T = m(\frac{v^2}{l} + g)$.

2) **Mişcarea pe plan orizontal**

Considerăm un sistem, format din două corpuri de masă m_1 şi m_2 , legate printr-un fir, cu coeficient de frecare μ între ele, pe o suprafaţă plană orizontală şi supus unei forţe de tracţiune $\vec{F}$, aplicată asupra corpului de masă m_1, în direcţia şi sensul mişcării (α=0).



Aflarea tensiunii mecanice: T

Pentru corpul de masă m_1: $F - T - F_{f1} = m_1 a \rightarrow F - F_{f1} - m_1 a = T$ unde $F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$.

Acceleraţia sistemului va fi : $a = \frac{F - (F_{f1} + F_{f2})}{m_1 + m_2} = \frac{F - \mu g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}$.

Cunoscându-se $F_{f1} = \mu m_1 g$ şi a putem afla tensiunea mecanică din firul de legătură. Putem aplica acelaşi raţionament şi în cazul corpului de masă m_2. : $T - F_{f2} = m_2 a \rightarrow T = m_2 a + F_{f2}$, unde $F_{f2} = \mu m_2 g \rightarrow$

$\rightarrow T = m_2 a + \mu m_2 g = m_2(a + \mu g) \rightarrow \quad T = m_2(a + \mu g)$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

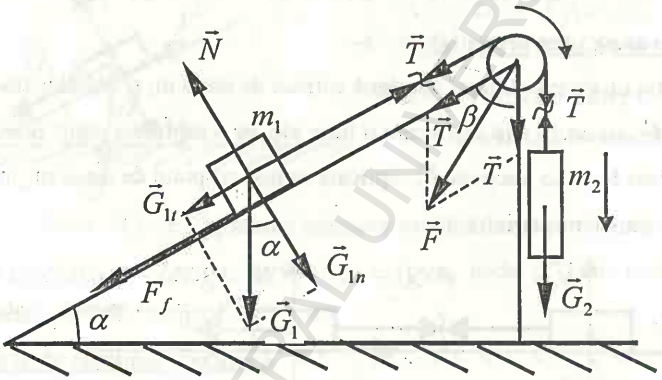
Cunoscându-l pe $a = \dfrac{F - \mu g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \rightarrow$ îl putem afla pe T care are aceiaşi valoare, ca şi în primul caz pentru corpul de masă m_1.

3) Mişcarea pe planul înclinat

Considerăm acelaşi sistem mecanic, însă când mişcarea are loc pe un plan înclinat, de unghi α.

a) urcarea corpului de masă m_1 pe planul înclinat de unghi α şi deplasarea pe verticală de sus în jos a corpului de masă m_2.

În acest caz forţa de tracţiune este greutatea $\vec{G}_2$.



Pentru corpul de masă m_2:

$$G_2 - T = m_2 a \rightarrow \quad T = G_2 - m_2 a = m_2(g - a).$$

Aflăm acceleraţia sistemului:

$$G_2 - (G_t + F_f) = (m_1 + m_2)a$$

$$m_2 g - m_1 g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = (m_1 + m_2)a \rightarrow$$

$$\rightarrow a = g\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} \rightarrow \text{acceleraţia sistemului.}$$

b) Coborârea corpului de masă m_1 pe planul înclinat de unghi $\propto$ şi deplasarea corpului de masă m_2 pe verticală de jos în sus.

BUJ INSTITUTE LIBRARY

Forţa de tracţiune în acest caz este $\vec{G}_t$, o componentă a greutăţii.

Pentru m_2: $T - G_2 = m_2 a \rightarrow \quad T = m_2(a+g)$. Aflarea acceleraţiei:

$$G_t - F_f - G_2 = (m_1+m_2)a \rightarrow \quad a = \frac{G_t - F_f - G_2}{m_1+m_2}.$$

Se înlocuieşte valoarea lui a în : $T = m_2(a+g)$ şi se determină T.

O mărime fizică vectorială, ce-o întâlnim în cazul studiului sistemelor mecanice, este forţa de apăsarea pe axul scripetelui, fie ca sistemul se găseşte în repaus, fie că se află în mişcare.

În cazul problemei rezolvată mai sus, se poate calcula forţa de apăsare pe axul scripetelui fix cu relaţia :

$$F = \sqrt{T^2 + T^2 + 2T^2 \cos\beta} \qquad unde \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$F = \sqrt{T^2 + T^2 + 2T^2 \cos\beta} = T\sqrt{2(1+\cos\beta)}$$

Cum $1 + \cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2}$, obţinem:

$$F = T\sqrt{2 \bullet 2\cos^2\frac{\beta}{2})} = 2T\cos\frac{\beta}{2}.$$

Deci forţa de apăsare pe axul scripetelui în timpul mişcării este:

$$F = 2T\cos\frac{\beta}{2}.$$

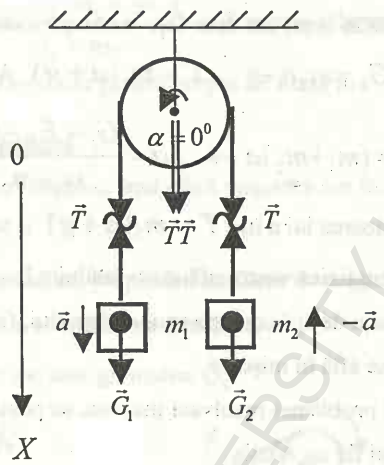
În mod analog se poate calcula forţa de apăsare pe axul unui scripete şi la alte sisteme mecanice, aflate fie, în mişcare, fie în repaus.

4. Scripeti

4.1 Scripete fix

Ne propunem să aflăm tensiunea mecanică T din fir şi forţa de apăsare pe axul scripetelui, când sistemul mecanic este format din două corpuri de mase m_1 şi m_2 , unde $m_1 > m_2$, iar frecările sunt neglijabile.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Cum $m_1 > m_2$, atunci şi $G_1 > G_2$ încât:

$$G_1 - G_2 = (m_1 + m_2)a \rightarrow$$

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \rightarrow \text{ acceleraţia sistemului.}$$

Aflarea tensiunii mecanice din firul de legătură.

Pentru corpul de masă m_1: $G_1 - T = m_1 a \rightarrow \; G_1 - m_1 a = T \rightarrow m_1(g-a) = T$

Cum îl cunoaştem pe : $a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$, atunci:

$$T = m_1\left[g - \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\right] = m_1 g\left[1 - \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\right] = m_1 g\left[\frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\right] =$$

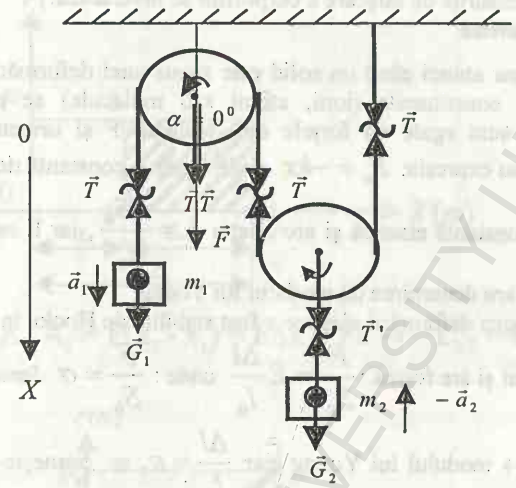
$$= \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \rightarrow \qquad T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

4.2. Scripete mobil.

Face parte din categoria maşinilor simple care în general ajută la ridicarea sau deplasarea corpurilor. Cu ajutorul lui se micşorează forţa activă, faţă de forţa de rezistenţă. Împreună cu scripetele fix, dă naştere la diferite asociaţii de scripeţi, sub diferite denumiri.

Considerăm un scripete mobil:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Scriem legea a doua a dinamicii pentru fiecare corp în parte.

Pentru m_1 : $m_1 g - T = m_1 a$ unde $|\vec{a}_2| = \frac{a_1}{2} = \frac{a}{2}$ şi

pentru m_2 : $T' - m_2 g = -m_2 \frac{a}{2}$, *iar* $T' = 2T$, *încât*

sistemul devine: $\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ 2T - m_2 g = -m_2 \frac{a}{2}. \end{cases}$

În urma rezolvării acestui sistem obţinem: $a = \frac{2(m_1 - m_2)g}{4m_1 + m_2}$ *şi*

$$T = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}.$$

Forţa de apăsare pe axul scripetelui fix, se află cu formula:

$$F = \sqrt{T^2 + T^2 + 2T^2 \cos 0^0} \qquad cum \cos 0^0 = 1 \rightarrow$$

$$F = \sqrt{4T^2} = 2T \quad sau \quad F = 2T$$

Deci când sistemul mecanic este în mişcare, forţa de apăsare pe axul scripetelui fix este $F = 2T$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cazul tratat este când $m_1 > m_2$, însă se poate întâmpla ca $m_2 > m_1$. În acest caz, sensurile de mişcare a corpurilor se inversează.

f). Forţe elastice

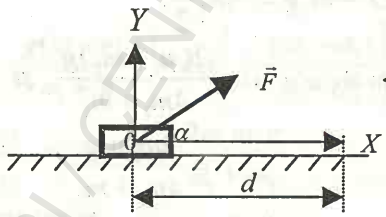
Apar atunci când un solid este supus unei deformări, încât distanţele particulelor constituente (ioni, atomi sau molecule) se modifică. Forţele elastice F_e sunt egale cu forţele deformatoare F şi orientate în sens opus acestora şi au expresia: $F_e = -kx$ unde k este o constantă de proporţionalitate denumită constantă elastică şi are relaţia $k = \frac{ES_0}{l_0}$, iar E este o constantă de material ce are denumirea de modulul lui Young.

Legea deformării elastice a fost stabilită de Hooke în mod experimental şi are forma : $\frac{F}{S_0} = E\frac{\Delta l}{l_0}$ unde : $\frac{F}{S_0} = \sigma$ denumită efort unitar, E→ modulul lui Young iar $\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$, se numeşte alungire relativă.

Cum: $E = \frac{ES_0}{l_0}$ şi $\Delta l = x$, legea lui Hooke se mai scrie: $F = kx$ unde F reprezintă forţa exterioară deformatoare, iar x alungirea absolută sau alungire.

I.3.2. Lucrul mecanic. Energia mecanică. Legi de conservare.

Formula de definiţie: $L = \vec{F}\vec{d} = Fd\cos\alpha$.



$$< L >_{SI} = < F >_{SI} \bullet < d >_{SI}$$

$$1j = 1N \bullet 1m$$

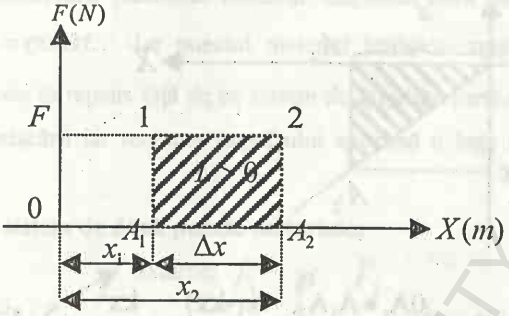
Un joule este lucrul mecanic efectuat de o forţă de 1N ce-şi deplasează punctul de aplicaţie cu 1m pe suportul forţei şi în sensul ei.

$L > 0$ (*motor*) *când* $\alpha < \frac{\pi}{2}$

$L < 0$ (*rezistent*) *când* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

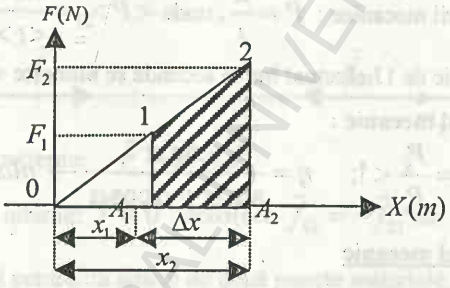
BCU IAŞI CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

a) F=const.



$L_{1\text{-}2} = \text{aria}\,1\,2\,A_2\,A_1 = F(x_2 - x_1) = F\Delta x = Fd \rightarrow \quad L_{1\text{-}2} = Fd$

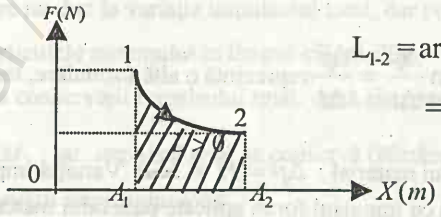
b) F→variabil



$$L_{1\text{-}2} = \text{aria}\,1\,2\,A_2\,A_1 = \frac{(F_2 + F_1)\Delta x}{2} = F_m(x_2 - x_1) = F_m d \rightarrow \quad L_{1\text{-}2} = F_m d$$

Unde F_m este media aritmetică a forţelor F_1 şi F_2 adică $F_m = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$

c) F→variabil

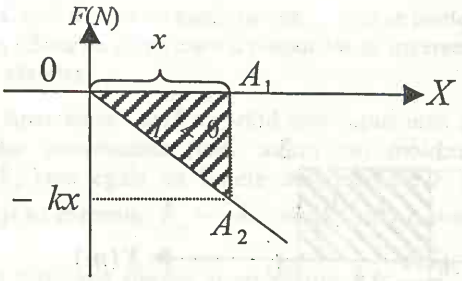


$$L_{1\text{-}2} = \text{aria}\,1\,2\,A_2\,A_1 = \int_1^2 F \bullet dx$$

- **<u>Lucrul mecanic efectuat de o forţă elastică</u>**

$F_e = -kx \rightarrow$ forţa elastică este o forţă conservativă

POLITEHNICA UNIVERSITY LIBRARY IASI



$$L_{Fe} = \text{aria}\, 0A_1A_2 = \frac{0A_1 \bullet A_1A_2}{2} = \frac{x(-kx)}{2} = -\frac{kx^2}{2} \rightarrow \quad L_{Fe} = -\frac{kx^2}{2}$$

Puterea mecanică: lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp.

Formula puterii mecanice : $P = \frac{L}{t}$, unde $<P>_{SI} = \frac{<L>_{SI}}{<t>_{SI}} \rightarrow \quad 1W = \frac{1j}{1s}$

Lucrul mecanic de 1J efectuat într-o secundă se numeşte watt.

- Randamentul mecanic :

$$\eta = \frac{L_u}{L_c} = \frac{P_u}{P_c} < 1; \quad \eta = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \rightarrow \textit{plan înclinat}$$

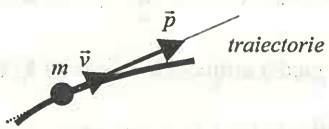
I.3.3. Impulsul mecanic

a) Pentru un singur punct material.

Impulsul punctului material este definit : $\vec{p} = m\vec{v}$ (vectorial) şi

$p = mv$ (în modul).

$$< p >_{SI} = Kg \bullet \frac{m}{s} = N \bullet s$$



Formula: $\vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ reprezintă o altă formulare, mai generală, a legii a II a dinamicii.

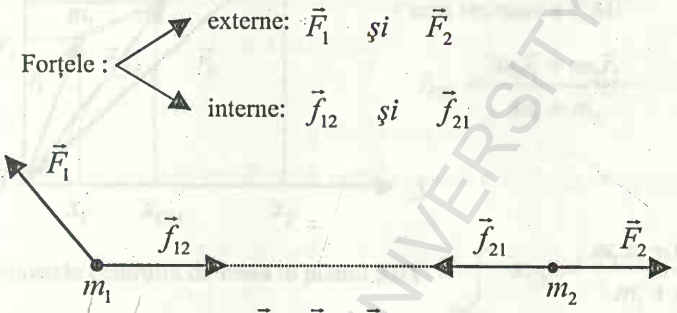
- Teorema punctului material : $\Delta\vec{p} = \vec{H} = \vec{F}\Delta t$ Variaţia impulsului punctului material este egală cu impulsul forţei aplicate punctului material.

Dacă $\vec{F} = 0$, punct material izolat, $\Delta\vec{p} = 0$ *sau* $\vec{p} = const.$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- Teorema conservării punctului material: impulsul unui punct material se conservă, $\vec{p} = const.$, iar punctul material izolat se mişcă fie rectiliniu uniform sau este în repaus faţă de un sistem de referinţă inerţial. Impulsul este o măsură a mişcării iar teorema impulsului exprimă o lege de conservare a materiei.

b) Pentru un sistem de două puncte materiale:



Rezultatele forţelor externe: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Rezultatele forţelor interne: $\vec{f} = 0$, deoarece $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ sau $\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = 0$.

Teorema impulsului pentru un sistem de două puncte materiale: $\vec{F}_m \Delta t = \Delta \vec{P}$, unde $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$.

Impulsul forţelor externe asupra sistemului este egal cu variaţia impulsului total. $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$ $(legea \quad II)$ unde $\vec{F}$ reprezintă

$\vec{F} \rightarrow$ rezultanta forţelor externe şi $\vec{P} \rightarrow$ impulsul total al sistemului.

- Forţele interioare nu duc la variaţia impulsului total, dar pot redistribui impulsul între particulele sistemului în timpul ciocnirilor.

Teorema conservării impulsului total: dacă sistemul este izolat $\vec{F} = 0$ atunci, $\vec{P} = const.$, iar impulsul total se conservă (rămâne constant).

- Teorema conservării impulsului total:

Dacă sistemul este izolat $(\vec{F} = 0)$, atunci impulsul total al sistemului se conservă: $\vec{P} = const.$

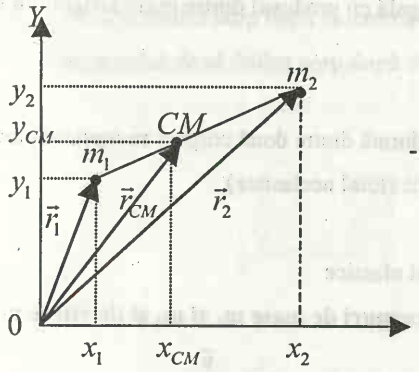
BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Teorema conservării impulsului pentru sisteme izolate se numeşte şi principiul conservării impulsului.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I.3.4. Centrul de masă a unui sistem de două particule.

Centrul de masă (CM) : un punct asociat sistemului ce caracterizează oarecum „global'' distribuția de masă a sistemului ce are proprietăți deosebite.



- raza vectoare a C.M:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

- Coordonatele centrului de masă în planul X0Y:

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \\ y_{CM} = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

- Coordonatele centrului de masă în spațiu:

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \\ y_{CM} = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \\ z_{CM} = \dfrac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

- Proprietățile centrului de masă:

- viteza centrului de masă: $\vec{v}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{\vec{P}}{m_1 + m_2}$,

unde: $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \rightarrow$ *impulsul total*

Dacă sistemul este izolat, atunci $\vec{P} = const.$, ceea ce face ca și $\vec{v} = const.$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

C.M. a unui sistem izolat se mişcă cu viteză constantă într-un sistem de referinţă inerţial.

- acceleraţia centrului de masă : $\vec{a}_{CM} = \dfrac{\vec{F}}{m_1 + m_2} \rightarrow \vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a}_{CM}$

Rezultanta forţelor externe este egală cu produsul dintre masa sistemului şi acceleraţia centrului de masă.

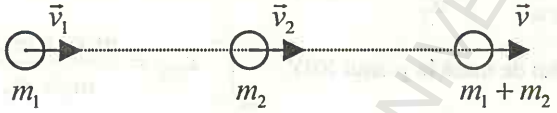
I.3.5. Ciocniri.

Interacţiunile de scurtă durată dintre două corpuri se numesc ciocniri.

Ciocniri → plastice (total neelastice)

Ciocniri → perfect elastice

a) Ciocnirea plastică a două corpuri de mase m_1 şi m_2 şi de viteze v_1 şi v_2.



$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} m_r v_r^2$$

- Se conservă numai impulsul şi nu se conservă legea energiei.

$m_r \rightarrow$ *masa redusă*

$v_r \rightarrow$ *viteză relativă*

b) Ciocnirea perfect elastică

- se conservă atât impulsul cât şi energia corpurilor:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 v_1'^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2'^2}{2} \end{cases}$$

Prin rezolvarea sistemului găsim:

$$v_1' = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 \quad şi \quad v_2' = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ciocnirea cu un perete când $m_2 >> m_1$ şi atunci avem:

$$v'_1 = 2v_2 - v_1 \quad şi \quad v'_2 = v_2$$

$v'_1 \rightarrow$ Viteza primului corp după ciocnirea elastică de masă m_1

$v'_2 \rightarrow$ Viteza celui de al doilea corp după ciocnirea elastică de masa m_2 .

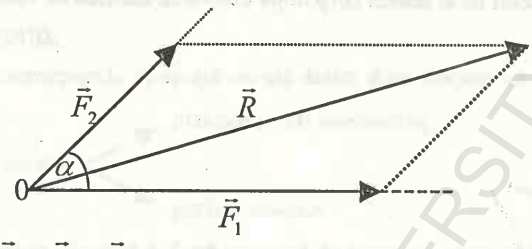
BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I.4 STATICA

Studiază echilibrul forțelor

I.4.1. Compunerea forțelor concurente

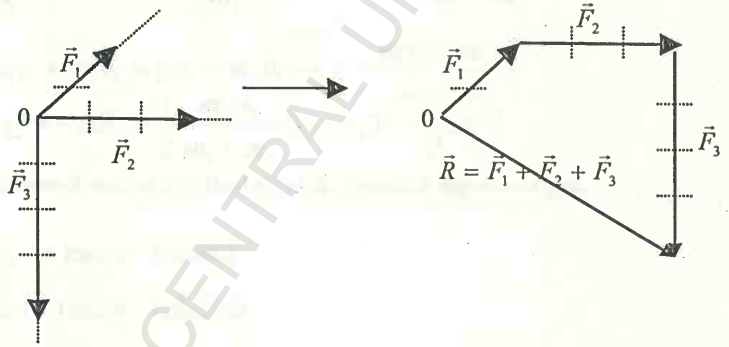
a) Regula paralelogramului:



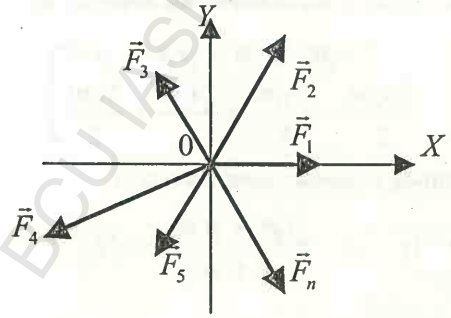
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (vectorial)$$

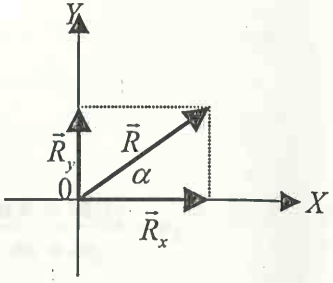
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \quad (\hat{i}n \ \ modul)$$

b) Regula poligonului:



c) Metoda analitică:



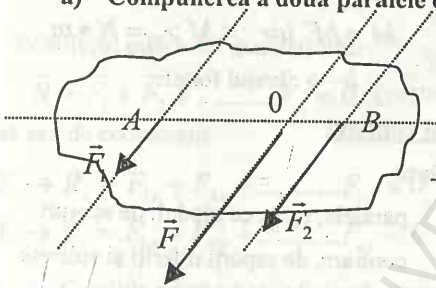


BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} F_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots\ldots + F_{nx} \to 0x \\ F_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots\ldots + F_{ny} \to 0y \end{cases} \qquad \begin{cases} R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ tg\alpha = \dfrac{R_y}{R_x} \end{cases}$$

I.4.2. Compunerea forțelor paralele.

a) Compunerea a două paralele de același sens.



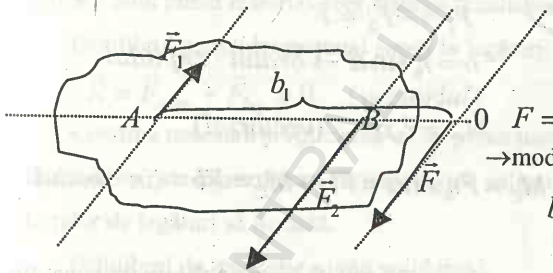
$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ *(vectorial)*

$F = F_1 + F_2 \to$

$\to$modulul rezultantei $\vec{F}$

$b_1 F_1 = b_2 F_2$

b) Compunerea a două paralele de sens contrar.

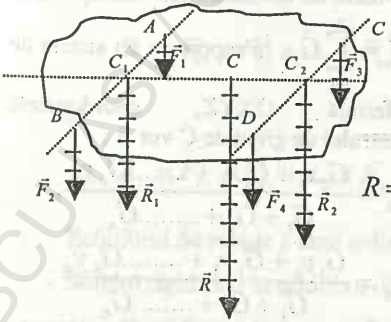


$F = |F_2 - F_1| \to$

$\to$modulul rezultantei $\vec{F}$.

$b_1 F_1 = b_2 F_2$.

c) Compunerea unui număr oarecare de forțe paralele.



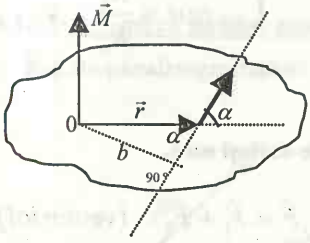
$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ *(vectorial)*

$R = R_1 + R_2 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ *(în modul)*

$\to$modulul rezultantei $\vec{R}$.

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I.4.3. Momentul forței față de un punct



$$\vec{M} = \vec{r}x\vec{F} \quad (vectorial) \text{ și}$$

$$M = rF\sin\alpha \quad (în \ \ modul).$$

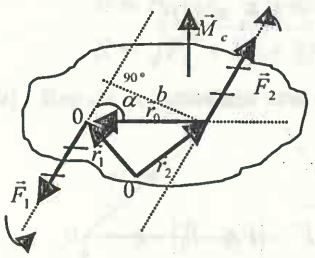
$$Cum \quad b = r\sin\alpha, \quad atunci:$$

$$M = bF \ iar \ < M >_{SI} = N \bullet m$$

$b \rightarrow$ brațul forței

I.4.4. Cuplul de forțe. Momentul cuplului

Cuplul de forțe: Sistem de două forțe



paralele, egale ca modul, de sensuri contrare, de suporți diferiți și aplicate asupra aceluiași corp.

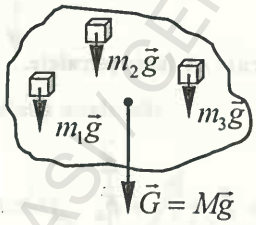
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$$

$$b = r_0\sin\alpha \rightarrow bratul \quad cuplului$$

$$\vec{M}_C = \vec{r}_0 x\vec{F} \quad (vectorial)$$

$$M_C = Fr_0\sin\alpha = Fl \rightarrow M_C = Fb \quad (în \ \ modul)$$

I.4.5. Centrul de greutate



Poziția centrului de greutate al unui solid este independentă de orientarea solidului în raport cu un sistem de referință fix.

Centrul de greutate C este un punct fix al corpului și reprezintă punctul de aplicație al greutății $\vec{G}$ al corpului: $\vec{G} = \sum_{i=1}^{n} \vec{G}_i$. În raport cu un sistem de referință OXYZ, coordonatele centrului de greutate C vor fi :

$$x_c = \frac{G_1x_1 + G_1x_1 + ...G_nx_n}{G_1 + G_1 + ...G_n};$$

$$y_c = \frac{G_1y_1 + G_1y_1 + ...G_ny_n}{G_1 + G_1 + ...G_n};$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$z_c = \frac{G_1 z_1 + G_1 z_1 + ...G_n z_n}{G_1 + G_1 + ...G_n}; \quad \text{sau}$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i};$$

- Echilibrul punctului material liber:

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\vec{F}_n = 0$ (vectorial) sau prin proiecţie după cele două axe de coordonate:

$$OX \rightarrow R_x = F_{1x} + F_{2x} + ...F_{1y} = 0$$
$$OY \rightarrow R_y = F_{1y} + F_{2y} + ...F_{ny} = 0$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru echilibrul unui sistem de forţe aplicată unui punct material liber, este ca rezultanta forţelor să fie nulă.

- Echilibrul punctului material supus la legături:

$\vec{R} = \vec{F}_{activ} + \vec{F}_{leg} = 0 \quad (vectorial)$

Condiţia necesară şi suficientă ca un punct material supus la legături să fie în echilibru este ca rezultanta forţelor active aplicate punctului material şi a forţelor de legături să fie nulă.

- Echilibrul de translaţie a unui solid rigid:

Solidul rigid este în echilibru de translaţie când rezultanta sistemului de forţe care acţionează să fie nulă: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...+ \vec{F}_n = 0 \quad (vectorial)$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + ...+ F_{nx} = 0 \quad \rightarrow OX$$

sau:

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + ...+ F_{ny} = 0 \quad \rightarrow OY$$

- Echilibrul de rotaţie a unui solid rigid:

Solidul rigid este în echilibru de rotaţie când se află în repaus sau când se roteşte uniform în jurul unei axe. Pentru a fi îndeplinite aceste condiţii este

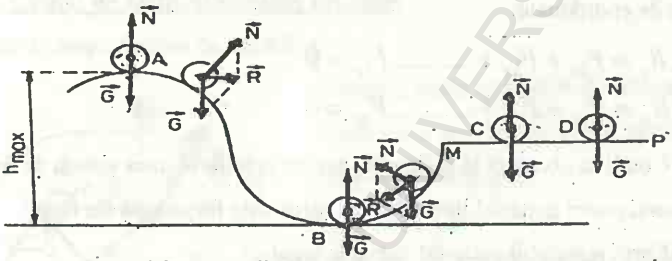
BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

necesar şi suficient ca momentul rezultant al forţelor aplicate solidului să fie nul. $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n = 0$

I.4.6. Echilibrul în câmp gravitaţional

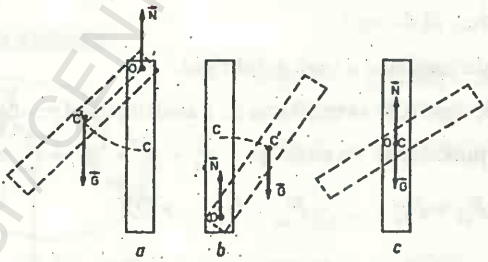
1. Echilibrul punctului material

Echilibrul punctului material
- Stabil→minimul de energie potenţială
- Instabil→maximul de energie potenţială
- Indiferent→energia potenţială este constantă



Poziţia de echilibru stabil a unui punct material sub acţiunea forţelor de greutate corespunde minimului de energie potenţială.

2. Echilibrul solidului rigid suspendat.



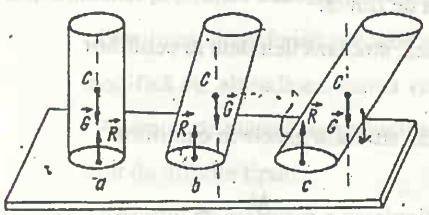
Solidul (rigla) este în echilibru: stabil în poziţia *a*; instabil în poziţia *b*; indiferent în poziţia *c*.

a) Echilibrul stabil:	b) Echilibrul instabil	c) Echilibrul indiferent
Centrul de greutate C se află sub punctul de suspensie O	Centrul de greutate C se află deasupra punctului de suspensie O	Centrul de greutate C coincide cu punctul de suspensie O

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3. Echilibrul solidului cu bază de sprijin.

Un corp aşezat pe o suprafaţă plană este în echilibru când verticala coborâtă din centrul său de greutate cade în interiorul suprafeţei de susţinere.



Cilindrul din figura a şi b este în echilibru pe când în poziţia c nu este în echilibru şi datorită greutăţii $\vec{G}$ şi forţei de reacţiune $\vec{R}$, formează un cuplu de forţă şi-l răstoarnă.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I.5 MECANICA FLUIDELOR

Studiază statica şi dinamica fluidelor (lichide şi gaze)

A. STATICA FLUIDELOR

Lichidele şi gazele poartă denumirea de fluide.

Statica fluidelor
- hidrostatica: studiază lichidele în echilibru
- aerostatica: studiază gazele în echilibru

1. Presiunea hidrostatică: $p = \frac{F}{S}$ unde $< p >_{SI} = \frac{N}{m^2} = Pa$ *(pascal)*

Alte unităţi de presiune:

1 atm (atmosferă fizică)=760mmHg=1,013•10^5N/m^2 (pascal)

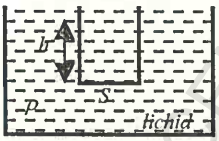
1 at (atmosferă tehnică)=98000 Pa

1 atm = 1,033 at

1 torr = 1mmHg ≅ 133,3 N/m^2

1 torr =13,6 mmH_2O

- presiunea hidrostatică la o adâncime h într-un lichid de densitate ρ.



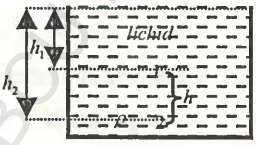
$$p = \frac{F}{S} = \frac{G}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{V\rho g}{S} = \frac{Sh\rho g}{S} = \rho gh \rightarrow$$

$$\rightarrow p = \rho gh$$

Dacă se ţine seama şi de presiunea atmosferică p_o , atunci la adâncimea h ,presiunea are valoarea: $p = p_0 + \rho gh$

- diferenţa de presiune dintre două puncte din interiorul unui lichid:

$$p_2 - p_1 = \rho gh \rightarrow$$



Diferenţa de presiune între două puncte dintr-un lichid, în echilibru, este numeric egală cu greutatea unei coloane din acel lichid, având ca bază unitatea de suprafaţă şi ca înălţime distanţa dintre

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

planele care conţin punctele respective.

- presiunea atmosferică este determinată de greutatea masei de aer pe suprafaţa Pământului.

- Experimental presiunea atmosferică se determină cu tubul lui Toricelli.

- Presiunea atmosferică normală are valoarea $p_0=1,013\bullet10^5$ N/m^2 şi se modifică cu: altitudinea, starea vremii, de la un loc la altul.

- Aparatul de măsură a presiunii atmosferice se numeşte barometru şi sunt de diferite tipuri:

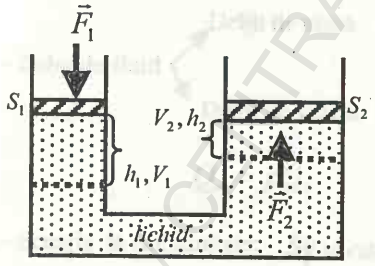
- Aparatul de măsurare a presiunii unui fluid (lichid +gaz) se numeşte manometru.

- legea lui Pascal: presiunea exercitată pe o suprafaţă oarecare a unui lichid aflat în repaus se transmite în toate direcţiile, cu aceiaşi intensitate în tot

- lichidul, cât şi pe pereţii vasului ce-l conţine.

- presa hidraulică: construită pe baza legii lui Pascal.

Schema de principiu a unei prese hidraulice:



Cum $p_1 = p_2$ rezultă:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$V_1 = V_2$$

(lichidele sunt incompresibile)

$$V_1 = S_1 h_1$$
$$V_2 = S_2 h_2$$
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

- legea lui Arhimede: un corp cufundat într-un fluid aflat în repaus este împins pe verticală de jos în sus cu o forţă egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit de corp.

$$F_A = G_l = \rho_l V g \quad \textit{unde} \quad \rho_l = \textit{densitatea fluidului}$$
$$\textit{iar} \quad V = \textit{volumul corpului cufundat}$$

BCU "ASTRA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cazuri particulare:

1) $G_c > F_A \rightarrow G_c - F_A = G_a \rightarrow G_c - F_A = ma_c \rightarrow \frac{G_c - F_A}{m} = a_c$

$a_c \rightarrow$ accelerația de coborâre

2) $G_c = F_A \rightarrow$ corpul rămâne în echilibru în interiorul fluidului

3) $G_c < F_A \rightarrow F_A - G_c = F_a \rightarrow$ forța ascensională

$F_A - G_c = ma_u \rightarrow a_u = \frac{F_A - G_c}{m}$, *unde* a_u este accelerația la urcare.

Substituind pe $G_c = V\rho_c g$, $F_A = V\rho_l g$ și $m = V\rho_c$, obținem pentru cele două accelerații: $a_c = \frac{g(\rho_c - \rho_l)}{\rho_c}$ și $a_u = \frac{g(\rho_l - \rho_c)}{\rho_c}$.

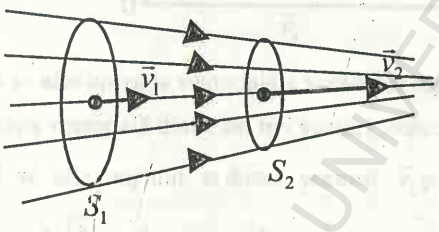
BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B. DINAMICA FLUIDELOR

I.5.2. Dinamica fluidelor
- hidrodinamica: studiază mişcarea lichidelor
- aerodinamica: studiază mişcarea gazelor

Curgere
- staţionară: forma liniilor de curent rămâne neschimbate
- nestaţionară: aspectul liniilor de curent se schimbă permanent

- Tub de curent: liniile de curent care trec prin toate punctele unui contur închis.



- Debit de fluid→: Cantitatea de fluid care străbate o arie în unitatea de timp.

- Debit de fluid
  - Debit de masă $Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} \rightarrow < Q_m >_{SI} = \frac{kg}{s}$
  - Debit de volum $Q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow < Q_v >_{SI} = \frac{m^3}{s}$

$$Q_m = \rho Q_v$$

- Ecuaţia de continuitate: $Sv = const.$
- Legea lui Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = const.$

Suma dintre presiunea statică (p), presiunea dinamică $(\frac{\rho v^2}{2})$, şi presiunea de poziţie $(\rho g z)$ este constantă de-a lungul liniei de curent.

Dacă tubul de curent este orizontal, atunci legea Bernoulli va fi:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = const.$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

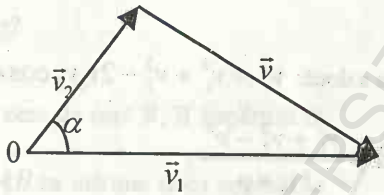
Ecuația de continuitate și legea lui Bernoulli sunt valabile numai pentru fluide ideale (lipsite de vâscozitate și incompresibile) și curgere staționară.

Aplicații ale legii lui Bernoulli:
- pulverizatorul
- trompa de apă
- tubul Venturi

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PROBLEME REZOLVATE

1). Se dau vitezele componente $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ ale unui mobil, cât şi vectorul rezultant $\vec{v}$, conform figurii:



a) Să se afle operaţia vectorială a vectorilor reprezentaţi în figură, să se scrie relaţia vectorială dintre cei trei vectori, concurenţi în 0 şi denumirea lor.

b) Să se afle unghiul α dintre vectorii $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ ştiind că : $v_1 = 7m/s$, $v_2 = 3\sqrt{2}\ \ m/s$ şi $v = 5\ \ m/s$

c) Să se calculeze : $|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|$, $|v_1 + v_2|$ şi produsul scalar al vectorilor $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$.

Rezolvare:

a) Întrucât $\vec{v}$ uneşte vârfurile vectorilor $\vec{v}_2$ şi $\vec{v}_1$, are sensul de la vectorul $\vec{v}_2$ (vector scăzător) către vectorul $\vec{v}_1$ (descăzut), operaţia vectorilor $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ este de scădere a vectorilor $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$, iar relaţia vectorială va fi $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}$.

$\vec{v}_1 \rightarrow$ vector descăzut

$\vec{v}_2 \rightarrow$ vector scăzător

$\vec{v} \rightarrow$ vector diferenţă

BCU MS / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) Aflarea unghiului α dintre vectorii $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ se face pe baza formulei : $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha}$, demonstrată la lecţia de fizică cu ocazia predării „Operaţii cu vectori''.

Pentru a-l afla pe α trebuiesc făcute nişte operaţii algebrice: ridicare la putere, găsirea funcţiei $\cos\alpha$, într-o expresie literară şi apoi valoarea unghiului α.

Ridicarea la puterea a două: $v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha \rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{v_1^2 + v_2^2 - v^2}{2v_1 \bullet v_2}.$$

Numeric: $\cos\alpha = \frac{48+18-25}{2 \bullet 7 \bullet \sqrt{3}} = \frac{42}{42 \bullet \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^o = \frac{\pi}{4} \rightarrow \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

c) Calcularea $|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = v_1 v_2 \sin\alpha = 7 \bullet \frac{m}{s} \bullet 3\sqrt{2}\frac{m}{s} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 21\frac{m^2}{s^2}$.

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = 21\frac{m^2}{s^2}.$$

Calcularea : $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha} = \sqrt{49+18+2 \bullet 7 \bullet 3\sqrt{2} \bullet \frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$= \sqrt{109} = 10{,}4 m/s$.

Calcularea produsului scalar: $P = \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\alpha = 7 \bullet 3 \bullet \sqrt{2} \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= 21 \rightarrow \quad P = 21$ (număr).

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2.Un punct material se mişcă pe un cerc de rază R=2m. Care sunt distanţele parcurse şi modulele vectorilor deplasare după:

a) o şesime de cerc;

b) un sfert de cerc;

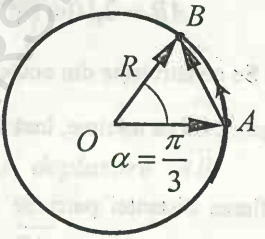
c) o jumătate de cerc;

d) trei sferturi de cerc;

e) un cerc întreg?

Rezolvare:

a) Construim un cerc de rază R, îl împărţim în şase arce egale $\overset{\frown}{AB}$ ca mărime şi cu unghiul la centru $\alpha = \frac{\pi}{3}$.



De calculat: Distanţa parcursă $\overset{\frown}{AB}$ şi modulul vectorului deplasare $\overrightarrow{AB}$.

Calcularea distanţei parcurse $\overset{\frown}{AB}$.

Mărimea distanţei parcurse va fi: $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{6} 2\pi R = \frac{\pi R}{3} \rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = \frac{\pi R}{3}$

Numeric: $\overset{\frown}{AB} = \frac{3{,}14 \bullet 2}{3} = 2{,}10\,m \rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = 2{,}10\,m$

Calcularea modulului vectorului deplasare $\overrightarrow{AB}$. Din figură se constată că:

$\overrightarrow{AB} \rightarrow$ vector de deplasare (vector diferenţă)

$\overrightarrow{OA} \rightarrow$ vector scăzător

$\overrightarrow{OB} \rightarrow$ vector descăzut

$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = R$

Scrierea vectorială : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Modulul vectorului deplasare $\overrightarrow{AB}$, se calculează cu formula: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\frac{\pi}{3}}$ sau R=2m şi $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ şi atunci avem:

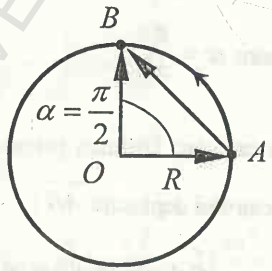
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2R^2 - 2R^2\frac{1}{2}} = \sqrt{2R^2 - R^2} = R \rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = R$$

Numeric : $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2m$

Răspunsurile la punctul a) sunt:

$$\overset{\frown}{AB} = 2{,}10m \text{ şi } \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2m.$$

b) Se construieşte din nou cercul de rază R, însă acum îl divizăm în patru arce egale $\overset{\frown}{AB}$ ca mărime, însă de unghi $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



Aflarea distanţei parcurse $\overset{\frown}{AB}$ şi a modulului vectorului deplasare $\overrightarrow{AB}$ (vector diferenţă) se face la fel ca în cazul a), numai că unghiul $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Calcularea distanţei parcurse $\overset{\frown}{AB}$.

Din figură se vede că arcul $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{4}2\pi R = \frac{\pi R}{2}$. Deci $\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi R}{2}$

Numeric $\overset{\frown}{AB} = \frac{3{,}14 \bullet 2}{2} = 3{,}14m \rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = 3{,}14m$

Calcularea modulului vectorului deplasare $\overrightarrow{AB}$:

Se calculează $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ cu formula: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\frac{\pi}{2}}$.

Dar $\cos\frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} \rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = R\sqrt{2}$.

Numeric : $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2 \bullet 1{,}41 = 2{,}82m$

Răspunsurile la punctul b) sunt:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

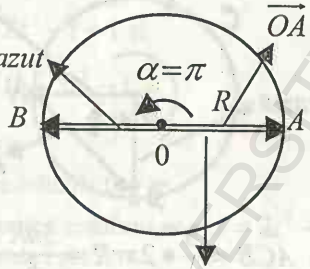
$$\overset{\frown}{AB} = 3{,}14m \text{ şi}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2{,}82m$$

c) Se procedează în mod analog ca la punctul a) şi b), numai că în acest caz cercul se împarte în două arce de cerc $\overset{\frown}{AB}$, egale între ele, având unghiul la centru $\alpha = \pi$.

$\overrightarrow{OB} \rightarrow$ *vectorul descazut*

$\overrightarrow{OA} \rightarrow$ *vectorul scazator*



vectorul deplasare $\overrightarrow{AB}$

Calcularea distanţei parcurse $\overset{\frown}{AB}$.

Se vede că: $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2} 2\pi R = \pi R \rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = \pi R$

Numeric: $\overset{\frown}{AB} = 3{,}14 \bullet 2 = 6{,}28m \rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = 6{,}28m$

Calcularea modulului vectorului deplasare $\overrightarrow{AB}$ se face cu formula:

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\alpha}$ şi cum $\alpha = \pi$, *iar* $\cos\pi = -1$

vom obţine: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{R^2 + R^2 + 2R^2} = 2R \rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2R$

Numeric: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2 \bullet 2 = 4m \rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 4m$.

Răspunsurile de la punctul c) sunt:

$$\overset{\frown}{AB} = 6{,}28m$$

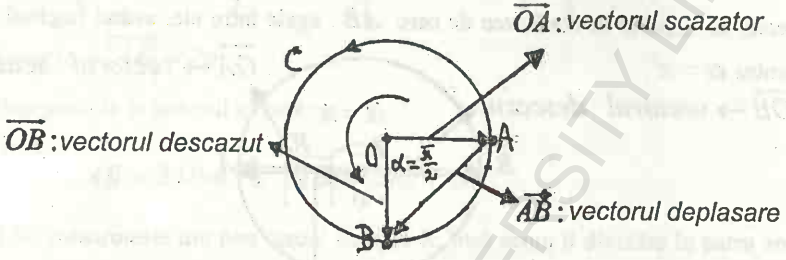
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4m$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

d) Se procedează la fel ca în cazurile a), b) şi c) numai că unghiul $\alpha = \frac{3\pi}{2}$,

iar drumul parcurs este arcul $\overset{\frown}{ACB}$.

Calcularea distanței parcurse $\overset{\frown}{ACB}$.



Se vede din figură că: $\overset{\frown}{ACB} = \frac{3}{4} \bullet 2\pi rR = \frac{3\pi R}{2} \rightarrow \quad \overset{\frown}{ACB} = \frac{3\pi R}{2}$

Numeric: $\overset{\frown}{ACB} = \frac{3 \bullet 3{,}14 \bullet 2}{2} = 9{,}42 \rightarrow \overset{\frown}{ACB} = 9{,}42m$.

Calcularea modulului vectorului deplasare $\overrightarrow{AB}$.

Ne folosim de formula $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\frac{3\pi}{2}}$.

Dar $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ şi atunci, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} \rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = R\sqrt{2}$.

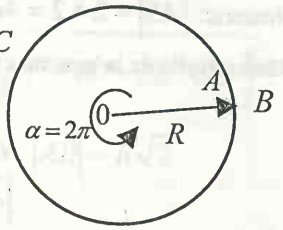
Numeric: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2 \bullet 1{,}41 = 2{,}82m \rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2{,}82m$.

Răspunsurile la punctul d) sunt:

$$\overset{\frown}{ACB} = 9{,}42m$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2{,}82m$$

e) Analog se procedează ca în toate cazurile precedente numai că drumul parcurs este $2\pi R$ iar unghiul la centru este $\alpha = 2\pi$.



Distanța parcursă este $\overset{\frown}{ACB} = 2\pi R$

Numeric: $\overset{\frown}{ACB} = 2 \bullet 3{,}14 \bullet 2 = 12{,}56m$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Întrucât punctele A şi B se suprapun, modul vectorului deplasare este nul.

Răspunsurile la punctul e) sunt: Distanţa parcursă $\overset{\frown}{ACB} = 12,56m$ şi modulul vectorului deplasare este nul.

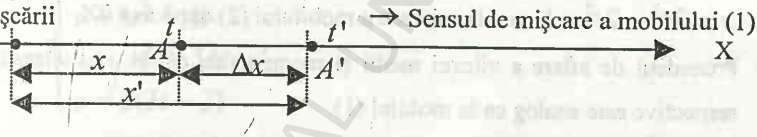
3. Să se calculeze vitezele medii, momentane, precum şi acceleraţiile corespunzătoare , mobilelor (1) şi (2) , dacă ecuaţiile lor de mişcare de-a lungul axei 0X sunt: a) $x = 2t^2 - t + 1$ şi

b) $x = t^3 - 2t^2 - 1$ şi

Rezolvare:

a) $x = 2t^2 - t + 1$ ec. mobilului (1)

Pentru mobilul (1) ce se mişcă conform ec.: $x = 2t^2 - t + 1$ figurăm pe axa 0X , poziţiile lui la momentele t şi t':



Scriem ec. de mişcare x şi x' la momentele t şi t'

$x = 2t^2 - t + 1$ şi $x' = 2t'^2 - t' + 1$

Calculăm deplasarea Δx în intervalul de timp Δt.

$\Delta x = x' - x = x = 2t'^2 - t' + 1 - 2t^2 + t - 1 = 2t'^2 - t' - 2t^2 + t.$

Cum $t' = t + \Delta t \rightarrow \Delta x = 2(t + \Delta t)^2 - (t + \Delta t) - 2t^2 + t =$

$2t^2 + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 - \Delta t - 2t^2 = 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 - \Delta t \rightarrow$

$\rightarrow \Delta x = 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 - \Delta t.$

Deci deplasarea are expresia : $\Delta x = 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 - \Delta t.$

Scriem formula de definiţie a vitezei medii:

$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (1.) . Înlocuim pe $\Delta x = 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 - \Delta t$ în relaţia (1) şi obţinem, $v_m = \frac{4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 - \Delta t}{\Delta t}$. Cum $\Delta t > 0$, simplificăm relaţia cu Δt şi avem: $v_m = 4t + 2\Delta t - 1$.

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Calculăm viteza momentană v, punând condiția ca $\Delta t \to 0$ iar matematic $\Delta t = 0$ și obținem: $v = 4t - 1$.

Pentru mobilul (1) avem: $\begin{cases} v_m = 4t + 2\Delta t - 1 \\ v = 4t - 1 \end{cases}$

Aflarea acceleraţiei medii a mobilului (1):

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La momentul t viteza are expresia $v = 4t - 1$ iar la timpul t' va avea relația : $v' = 4t' - 1$.

Calculăm variația de viteză Δv, în intervalul de timp Δt și obținem:

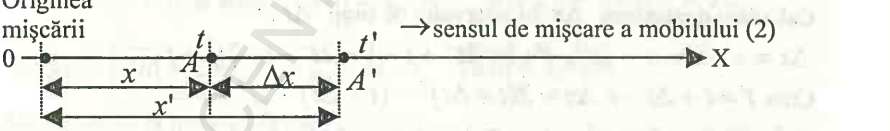
$\Delta v = v' - v = 4t' - 1 - 4t + 1 = 4t' - 4t = 4(t' - t)$.

Cum $t' - t = \Delta t$ avem: $\Delta v = 4\Delta t$. Înlocuim pe $\Delta v = 4\Delta t$, în expresia lui $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, căpătăm: $a_m = \frac{4\Delta t}{\Delta t} = 4 \to \quad a_m = 4$ și $a = 4$.

b) $x = 2t^3 - 2t^2 - 1$ ec. de mișcare a mobilului (2) după axa 0X.

Procedeul de aflare a vitezei medii și momentane, cât și a acceleraţiilor respective este analog ca la mobilul (1).

Figurăm poziţiile mobilului (2) la t și t' pe axa 0X:



1) Calculăm $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \frac{x' - x}{\Delta t} = \frac{t'^3 - 2t'^2 - 1 - t^3 + 2t^2 + 1}{\Delta t} = \frac{t'^3 - 2t'^2 + t^3 + 2t^2}{\Delta t} =$

$$= \frac{(t + \Delta t)^3 - 2(t + \Delta t)^2 - t^3 + 2t^2}{\Delta t} =$$

$$= \frac{t^3 + 3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 - 2t^2 - 4t\Delta t - (\Delta t)^2 - t^3 + 2t^2}{\Delta t} =$$

$$= \frac{3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 - 4t\Delta t - (\Delta t)^2}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2 - 4t - \Delta t.$$

BCUAIE CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deci $v_m = 3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2 - 4t - \Delta t = 3t^2 + (3t-1)\Delta t + (\Delta t)^2 - 4t$.

Pentru $\Delta t \to 0$, adică matematic $\Delta t = 0$, obţinem ec. vitezei momentane :

$v = 3t^2 - 4t$

2) Calculăm $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v'-v}{\Delta t} = \frac{3t'^2 - 4t' - 3t^2 + 4t}{\Delta t} =$

$= \frac{3(t+\Delta t)^2 - 4(t+\Delta t) - 3t^2 + 4}{\Delta t} = \frac{3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 4t - 4\Delta t - 3t^2 + 4t}{\Delta t} =$

$= \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 4\Delta t}{\Delta t} = 6t + 3\Delta t - 4 \to \quad deci: \quad a_m = = 6t + 3\Delta t - 4.$

Pentru $\Delta t \to 0$, iar matematic $\Delta t = 0$, obţinem ec. acceleraţiei momentane:

$a = 6t - 4 = 2(3t-2) \to \quad a = 2(3t-2)$.

Răspunsurile la mobilul (2):

$$\begin{cases} v_m = 3t^2 + (3t-1)\Delta t + (\Delta t)^2 - 4t \\ v = 3t^2 - 4t \\ a_m = = 6t + 3\Delta t - 4 \\ a = 2(3t-2) \end{cases}$$

4. Ecuaţia mişcării unui mobil după axa 0X este de forma : $x = t^2 - t + 1$.

a) Să se interpreteze mişcarea.
b) Să se scrie ecuaţia vitezei.
c) Să se construiască graficul legii mişcării şi a vitezei.

Rezolvare:

a) Ecuaţia generală a mişcării uniform variate pentru $t_0 = 0$ este de forma:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

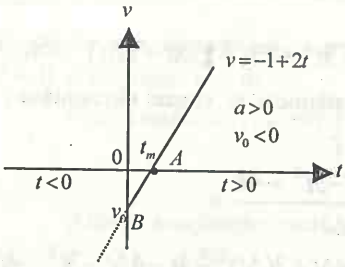
b) Ecuaţia vitezei în mişcarea uniform variată este $v = v_0 + at$. Dar $v_0 = -1$ unitate de viteză şi $a = 2$ unităţi de acceleraţie, încât ecuaţia vitezei este : $v = -1 + 2t$.

c) Graficul vitezei este o dreaptă ce trece prin două puncte A şi B.

Calcularea lui $t_m = -\frac{v_0}{a} = \frac{-(1)}{2} = \frac{1}{2}$ unităţi de timp.

Graficul vitezei $v = -1 + 2t$ în sistemul de axe 0t şi 0v rectangulare este:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



O porțiune din dreapta $v=-1+2t$ este întreruptă (punctată) deoarece se află în domeniul $t<0$ iar în fizică nu există timp negativ ci numai timp pozitiv. Pentru t<0 considerăm un timp trecut.

Graficul legii mișcării uniform variate $x=t^2-t+1$ va fi o parabolă.

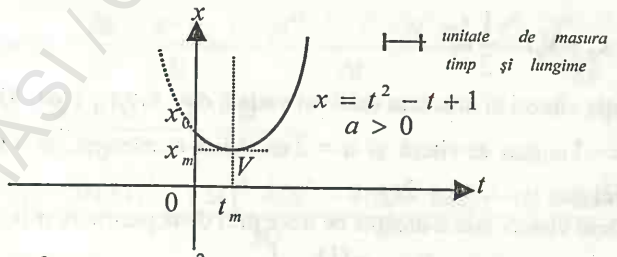
Trebuie determinate: $t_m=-\frac{v_0}{a}$, $x_m=x_0-\frac{v_0^2}{2a}$, adică coordonatele vârfului parabolei $V(t_m,x_m)$.

$t_m=-\frac{v_0}{a}=-\frac{(-1)}{2}=\frac{1}{2}$ unități de timp.

$x_m=x_0-\frac{v_0^2}{2a}=1-\frac{1^2}{2\bullet 2}=1-\frac{1}{4}=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$ unități de lungime.

Deci $\begin{cases} t_m=\frac{1}{2} \text{ unități de timp} \\ x_m=\frac{3}{4} \text{ unități de spațiu (lungime)} \end{cases}$

Reprezentarea grafică în sistemul de coordonate $t0x$:



Întrucât $a>0$, curba $x=t^2-t+1$ are ramurile orientate în sus, posedă un minim în $V(t_m,x_m)$ iar ramurile curbei nu taie axa $0t$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5. Se consideră mişcarea definită prin ecuaţia:

$$x = -2t^2 + 4t - 1$$

Se cere: a) Să se interpreteze mişcarea

b) Să se scrie ecuaţia vitezei

c) Să se construiască graficele mişcării şi a vitezei.

Rezolvare:

a) identificăm coeficienţii ecuaţiilor : $x = -2t^2 + 4t - 1$ şi

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$$

$x_0 = -1$ unitate de lungime.

$v_0 = 4$ unităţi de viteză

$\frac{a}{2} = -2 \rightarrow \quad a = -4$ unităţi de acceleraţie.

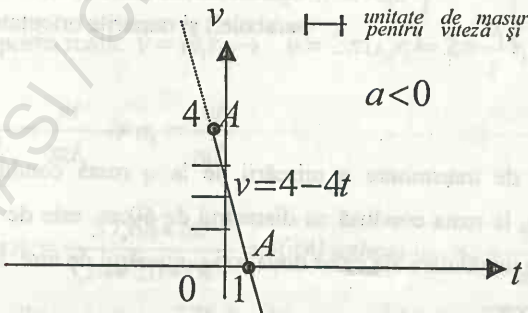
Cum $a < 0$ mişcarea este uniform încetinită şi curba (parabola) va prezenta un maxim iar ramurile vor fi orientate în jos.

b) Graficul ecuaţiei vitezei $v = v_0 + at = 4 - 4t$

Deci ecuaţia vitezei va fi: $v = 4 - 4t$

Graficul lui $v = 4 - 4t$ va fi o dreaptă.

$t_m = \frac{-v_0}{a} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad t_m = 1$ unitate de timp, $v_0 = 4$ unităţi de viteză.



Graficul mişcării: $x = -2t^2 + 4t - 1$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$a = -4$ unități de accelerație

$v_0 = 4$ unități de viteză

$x_0 = -1$ unități de lungime

Trebuiesc aflate: $t_m = \dfrac{-v_0}{a}$ și $x_m = x_0 - \dfrac{v_0^2}{2a}$.

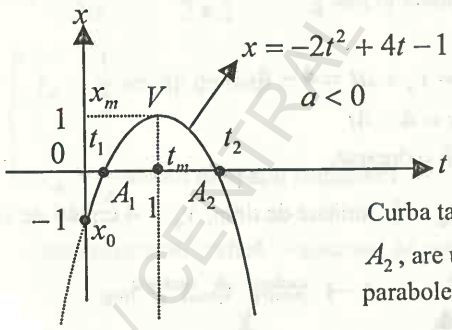
$$t_m = \frac{-4}{-4} = 1 \text{ unitate de timp}$$

$$x_m = -1 - \frac{16}{2(-4)} = -1 + \frac{16}{8} = -1 + 2 = 1 \text{ unitate de lungime}$$

Deci $t_m = 1$ unitate de timp

$x_m = 1$ unitate de lungime

Reprezentarea grafică:



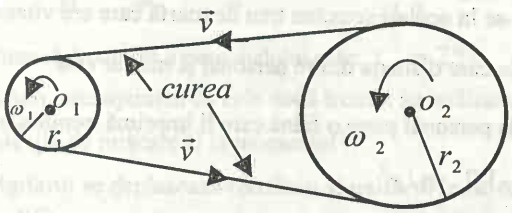
Curba taie axa $0t$ în punctele A_1 și A_2, are un maxim în V (vârful parabolei) și ramurile orientate în jos.

6. Viteza curelei de transmitere a mișcării de la o roată conductoare cu diametru de 20cm, la roata condusă cu diametrul de 60cm, este de 37,68m/s. Să se afle: vitezele unghiulare ale celor două roți și numărul de ture. Între curea și roți nu există frecare.

Rezolvare:

BUJIASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se reprezintă sistemul mecanic prin desen.



a) Aflarea vitezelor unghiulare ω_1 şi ω_2 a roţilor de diametru d_1 şi d_2.
Ne folosim de formula : $v = \omega r$.

- Pentru prima roată vom avea : $v = \omega_1 r_1 \rightarrow \quad \omega_1 = \dfrac{v}{r_1}$,

dar $d_1 = 2r_1 \rightarrow \quad r_1 = \dfrac{d_1}{2}$, încât $\omega_1 = \dfrac{v}{\frac{d_1}{2}} = \dfrac{2v}{d_1} \rightarrow \omega_1 = \dfrac{2v}{d_1}$.

Numeric: $\omega_1 = \dfrac{2 \bullet 37{,}68}{20 \bullet 10^{-2}} = 376{,}8$ rad/s.

- Pentru a doua roată: $\omega_2 = \dfrac{v}{r_2} = \dfrac{v}{\frac{d_2}{2}} = \dfrac{2v}{d_2}$.

Numeric: $\omega_2 = \dfrac{2 \bullet 37{,}68}{60 \bullet 10^{-2}} = 125{,}5$ rad/s. $\omega_2 = 125{,}5$ rad/s

b) Aflarea numărului de ture a celor două roţi.

Pentru prima roată: $v = \omega_1 r_1 \rightarrow \quad v = 2\pi \upsilon_{1l} r_1 = 2\pi \dfrac{n_1}{t} r_1 \rightarrow n_1 = \dfrac{vt}{2\pi r_1} =$

$= \dfrac{vt}{2\pi \frac{d_1}{2}} = \dfrac{vt}{\pi d_1} \rightarrow n_1 = \dfrac{vt}{\pi d_1}$.

Numeric: $n_1 = \dfrac{37{,}68 \bullet 60}{3{,}14 \bullet 20 \bullet 10^{-2}} = 3600$ rot/min iar $n_2 = \dfrac{vt}{\pi d_2} = 1200$ rot/min

Răspunsurile sunt; $\omega_1 = 376{,}8$ rad/s ; $\omega_2 = 125{,}5$ rad/s ; $n_1 = 3600$ rot/min şi $n_2 = 1200$ rot/min.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

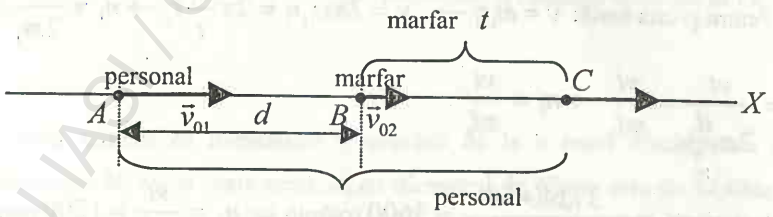
7). Mecanicul unui tren de persoane, care se deplasează cu viteza $v_{01} = 30\,\text{m/s}$ vede în fața lui, deplasându-se în același sens, un tren de marfă care are viteza $v_{02} = 9\,\text{m/s}$. În momentul în care distanța dintre personal și marfar este $d = 180\,\text{m}$, mecanicul de la personal pune o frână care îi imprimă trenului o accelerație de frânare $a = -1{,}2\ \ m/s^2$.

Se consideră că mecanicul de pe trenul de marfă nu observă apropierea personalului și trenul de marfă continuă să se deplaseze uniform cu viteza v_{02}.

Să se stabilească dacă are sau nu loc ciocnirea dintre cele două trenuri. (Culegerea Tr. Crețu ed. 1974 pag. 34 prob. 1.2.18)

Rezolvare.

Pentru a stabili dacă cele două trenuri se ciocnesc sau nu, trebuie să întocmim o schiță, în care să figurăm poziția inițială a celor două trenuri, să aflăm timpul de oprire a personalului și să-l comparăm cu timpii rezultați prin rezolvarea matematică a unei ecuații de gradul doi, obținută din condiția de întâlnire a celor două trenuri, într-un anumit punct pe direcția de deplasare. În urma datelor obținute vom stabili cu siguranță dacă trenurile se ciocnesc sau nu.



Personalul se deplasează uniform încetinit și putem afla timpul de oprire din ecuația vitezei:

$0 = v_{01} + at_{op} \rightarrow \quad t_{op} = -\frac{v_{01}}{a} = \frac{-30}{-1,2} = 25s$.

Timpul de oprire a personalului este: $t_{op} = 25s$.

Acum, presupunem că cele două trenuri se întâlnesc într-un punct C de pe direcţia de mişcare şi la momentul t.

Marfarul se deplasează rectiliniu şi uniform încât ec. lui de mişcare va fi: $BC = v_{02}t$. Personalul se deplasează rectiliniu uniform încetinit iar ec. de mişcare este : $AC = v_{01}t + \frac{at^2}{2}$. Din figură se vede că: $AC = d + BC$ şi înlocuind pe $AC = v_{01}t + \frac{at^2}{2}$ şi $BC = v_{02}t$, obţinem:

$$v_{01}t + \frac{at^2}{2} = d + v_{02}t \rightarrow 2v_{01}t + at^2 = 2d + 2v_{02}t \rightarrow$$

$$\rightarrow at^2 + 2v_{01}t - 2v_{02}t - 2d = 0 \rightarrow at^2 - 2(v_{02} - v_{01})t - 2d = 0$$

Rezolvăm ec. de gradul doi în t, avem :

$$t = \frac{(v_{02} - v_{01}) \pm \sqrt{(v_{02} - v_{01})^2 + 2ad}}{a}.$$

Numeric : $t = \frac{9 - 30 \pm \sqrt{(9-30)^2 + 2(-1,2)180}}{-1,2} \rightarrow t_1 = 15s$ şi $t_2 = 20s$

Comparând timpii $t_1 = 15s$, $t_2 = 20s$ cu $t_{op} = 25s$, putem afirma că cele două trenuri se ciocnesc: o primă ciocnire se produce la $t_1 = 15s$ iar a doua ciocnire la $t_2 = 20s$.

Răspunsul corect este că cele două trenuri se ciocnesc.

8. Un aerostat se ridică, fără viteză iniţială dintr-o localitate de pe suprafaţa Pământului, într-o mişcare uniform variată cu acceleraţia constantă a. Când în urcare atinge o altitudine h, este lăsat liber un obiect din aerostat iar acesta îşi continuă mişcarea uniform variată pe verticală. Se cere :

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

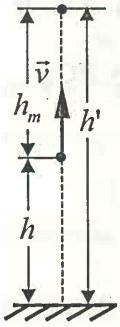
a) La ce altitudine de suprafaţa Pământului se găseşte obiectul când se opreşte;

b) Timpul cât urcă obiectul după părăsirea aerostatului şi spaţiul parcurs.

c) Viteza cu care obiectul ajunge din nou la suprafaţa Pământului şi

d) Timpul total făcut de obiect de la părăsirea aerostatului până la pământ.

Rezolvare:



a) Obiectul până la altitudinea h fiind în aerostat, are mişcarea uniform accelerată cu acceleraţia a şi în momentul lăsării libere, are viteza $v=\sqrt{2ah}$ ca apoi până la oprire la altitudinea h', faţă de suprafaţa Pământului, să aibă o mişcare uniform încetinită cu acceleraţia gravitaţională g.

Altitudinea h' faţă de suprafaţa Pământului la care se opreşte obiectul va fi: $h'=h+h_m$ unde $h_m=\frac{v^2}{2g}$ şi $v=\sqrt{2ah}$,

atunci $h_m=\frac{2ah}{2g}=\frac{ah}{g}$.

Cunoscând pe $h_m=\frac{ah}{g}$ pentru $h'=h+h_m$ vom avea: $h'=h+\frac{ah}{g}=$

$=h(1+\frac{a}{g})=h\frac{g+a}{g}$.

Răspunsul la punctul (a) va fi : $h'=\frac{(g+a)h}{g}$.

b) Calcularea timpului cât urcă obiectul după părăsirea aerostatului se face cu formulele: $t_u=\frac{v}{g}=\frac{1}{g}\sqrt{2ah}$ şi

$$h_m=\frac{v^2}{2g}=\frac{1}{2g}2ah=\frac{ah}{g}.$$

Răspunsurile la punctul (b) sunt: $t_u=\frac{1}{g}\sqrt{2ah}$ şi $h_m=\frac{ah}{g}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) Pentru a afla viteza obiectului la suprafaţa Pământului trebuie să ne folosim de formula Galileo-Galilei:

$$v_p = \sqrt{2gh'} = \sqrt{\frac{2gh(a+g)}{g}} = \sqrt{2h(a+g)} \rightarrow \quad v_p = \sqrt{2h(a+g)}$$

Răspunsul la punctul (c): $v_p = \sqrt{2h(a+g)}$

d) Pentru a afla timpul total cât face obiectul de la părăsirea aerostatului şi sosirea pe Pământ, trebuie să însumăm timpul de urcare $t_u = \frac{1}{g}\sqrt{2ah}$ cu

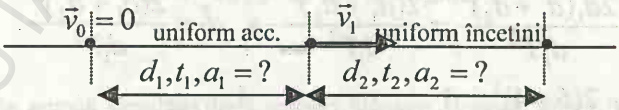
$t_c = \sqrt{\frac{2h'}{g}}$ unde $h' = \frac{h(a+g)}{g}$, încât :

$$t = t_u + t_c = \sqrt{\frac{2ah}{g^2}} + \sqrt{\frac{2}{g} \bullet \frac{h(a+g)}{g}} = \frac{1}{g}\left[\sqrt{2ah} + \sqrt{2h(a+g)}\right]$$

Răspunsul la punctul (d) este : $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left[\sqrt{a} + \sqrt{(a+g)}\right]$.

9. Un corp porneşte uniform accelerat fără viteză iniţială şi parcurge astfel un drum $d_1 = 6$ m, după care merge uniform încetinit şi parcurge astfel un drum $d_2 = 4$ m până la oprire. Ştiind timpul total $T = 10s$ al mişcării, să se calculeze acceleraţiile în acele mişcări. (Fizica cl. IX. pag.236/1993)

Rezolvare.



Spaţiu : $d_1 = v'_m t_1 = \frac{0 + v_1}{2} t_1 = \frac{v_1 t_1}{2} \rightarrow d_1 = \frac{v_1 t_1}{2}$ şi $d_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Spațiu : $d_2 = v''_m t_2 = \frac{0+v_1}{2} t_2 = \frac{v_1 t_2}{2} \rightarrow d_2 = \frac{v_1 t_2}{2}$ și $d_2 = v_1 t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2}$.

Timpul total: $T = t_1 + t_2$

S-a obținut sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{v_1 t_1}{2} \\ d_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2} \\ T = t_1 + t_2 \\ d_2 = \frac{v_1 t_2}{2} \\ d_2 = v_1 t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2} \end{cases}$$

Prin rezolvarea acestui sistem trebuie aflate a_1 și a_2.

Facem raportul: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{v_1 t_1}{2} \bullet \frac{2}{v_1 t_2} = \frac{t_1}{t_2} \rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{t_1}{t_2}$ (1).

Din relația (1) $\frac{d_1}{d_2} = \frac{t_1}{t_2}$ împreună cu relația $T = t_1 + t_2$, se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} T = t_1 + t_2 \\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{t_1}{t_2} \end{cases}$$

rezultă: $t_1 = \frac{d_1 T}{d_1 + d_2}$

$t_2 = \frac{d_2 T}{d_1 + d_2}$

- Aflarea accelerației a_1.

Ne folosim de $d_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$ și valoarea lui $t_1 = \frac{d_1 T}{d_1 + d_2}$ și găsim:

$$a_1 = \frac{2d_1}{t_1^2} = \frac{2d_1(d_1+d_2)^2}{d_1^2 T^2} = \frac{2(d_1+d_2)^2}{d_1 T^2} \rightarrow a_1 = \frac{2(d_1+d_2)^2}{d_1 T^2}.$$

Numeric $a_1 = \frac{2(6+4)^2}{6 \bullet 100} = \frac{1}{3} m/s^2 \rightarrow a_1 = \frac{1}{3} m/s^2$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- Aflarea acceleraţiei a_2:

Ne folosim de $d_2 = v_1 t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2} \rightarrow \quad a_2 = \frac{2(d_2 - v_1 t_2)}{t_2^2}$ (2).

Substituim relaţia $t_2 = \frac{d_2 T}{d_1 + d_2}$ în (2) şi rezultă :

$$a_2 = \frac{2\left(d_2 - v_1 \frac{d_2 T}{d_1 + d_2}\right)(d_1 + d_2)^2}{d_2^2 T^2} = \frac{2(1 - \frac{v_1 T}{d_1 + d_2})(d_1 + d_2)^2}{d_2 T^2} \rightarrow$$

$$a_2 = \frac{2(1 - \frac{v_1 T}{d_1 + d_2})(d_1 + d_2)^2}{d_2 T^2} \quad (3).$$

Trebuie calculat $v_1 = a_1 t_1 = \frac{2(d_1 + d_2)^2}{d_1 T^2} \bullet \frac{d_1 T}{d_1 + d_2} = \frac{2(d_1 + d_2)}{T} \rightarrow$

$\rightarrow v_1 = \frac{2(d_1 + d_2)}{T}$ (4) Relaţia (4) o introducem în relaţia (3):

$$a_2 = \frac{2\left[1 - \frac{2(d_1 + d_2)}{T} \bullet \frac{T}{(d_1 + d_2)}\right] \bullet (d_1 + d_2)^2}{d_2 T^2} = \frac{2(1-2)(d_1 + d_2)^2}{d_2 T^2} =$$

$$= \frac{-2(d_1 + d_2)^2}{d_2 T^2} \rightarrow \quad a_2 = \frac{-2(d_1 + d_2)^2}{d_2 T^2}.$$

Numeric $a_2 = \frac{-(6+4)^2}{4 \bullet 100} = -0{,}5 m/s^2$.

Cele două acceleraţii ale corpului sunt:

$$a_1 = \frac{1}{3} m/s^2 \text{ şi } a_2 = -0{,}5 m/s^2.$$

10. Se aruncă simultan două corpuri identice, dintr-un punct de pe suprafaţa Pământului cu aceiaşi viteză iniţială v_0 în modul următor: unul oblic sub un

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unghi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ cu orizontala şi celălalt vertical de jos în sus . Se neglijează frecările cu aerul.

Se cer rapoartele dintre:

a) înălţimile maxime la care se pot ridica corpurile;

b) înălţimea maximă pe oblică şi bătaia teoretică pe orizontală şi

c) înălţimea maximă pe verticală şi bătaia teoretică pe orizontală.

Rezolvare:

Pentru a trece la rezolvarea punctuală a problemei mai întâi scriem formulele necesare:

$h_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \rightarrow$ înălţimea maximă la aruncarea oblică.

$h_2 = \frac{v_0^2}{2g} \rightarrow$ înălţimea maximă la aruncarea pe verticală de jos în sus.

$b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \rightarrow$ bătaia teoretică pe orizontală la aruncarea oblică.

a) Calculăm: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \bullet \frac{2g}{v_0^2} = \sin^2 \alpha$. Cum $\alpha = \frac{\pi}{4}$ iar $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

atunci: $\frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$

b) Calculăm:

$$\frac{h_1}{b} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \bullet \frac{g}{v_0^2 \sin 2\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \sin 2\alpha} = \frac{\sin \alpha \bullet \sin \alpha}{2 \bullet 2 \sin \alpha \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{2 \bullet 2 \cos \alpha} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2 \bullet 2 \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \bullet 2 \bullet \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{h_1}{b} = \frac{1}{4}.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) Calculăm:

$$\frac{h_2}{b}=\frac{v_0^2}{2g}\bullet\frac{g}{v_0^2\sin 2\alpha}=\frac{1}{2\bullet 2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2\bullet 2\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Cele trei rapoarte cerute în problemă sunt :

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{1}{2};\ \frac{h_1}{b}=\frac{1}{4};\ \text{şi}\ \frac{h_2}{b}=\frac{1}{2}.$$

11. Se aruncă concomitent de la înălţimea h faţă de sol, două corpuri identice cu v_{01} şi v_{02}, pe direcţia orizontală însă în condiţia $v_{02}=2v_{01}$ iar frecările cu aerul sunt neglijabile.

Se cer raporturile dintre:

a) timpii de sosire la sol,

b) proiecţiile lor pe orizontală,

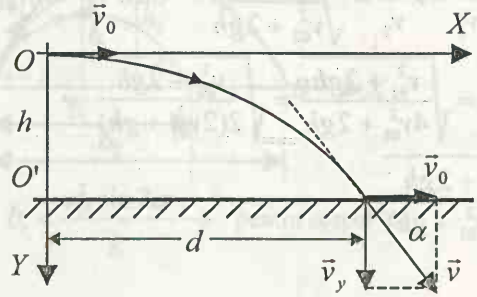
c) vitezele la sol şi

d) raportul tangentelor dintre direcţia vitezelor la sol şi a orizontalei

Rezolvare:

Înainte de a trece la rezolvarea problemei vom face anumite considerente.

La aruncarea unui corp în direcţia orizontală cu viteza iniţială v_0 şi de la înălţimea h faţă de suprafaţa Pământului avem figura:



BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

După 0X: $d = v_0 t$ iar după 0Y: $y = h = \frac{gt^2}{2}$; $v_y = gt$ și $v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2}$.

Din relația $h = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. și înlocuind pe $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, obținem:

$d = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$; $v_y = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{g^2 2h}{g}} = \sqrt{2gh}$ și $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$;

$tg\alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{gt}{v_0} \rightarrow tg\alpha = \frac{gt}{v_0}$

Pe baza relațiilor: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $d = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$, $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ și $tg\alpha = \frac{gt}{v_0}$ se află rapoartele cerute în problemă.

a) Aflarea: $\frac{t_1}{t_2} \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{\frac{2h}{g}}{\frac{2h}{g}}} = 1 \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = 1.$

b) Aflarea: $\frac{d_1}{d_2} \rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{v_{01}\sqrt{\frac{2h}{g}}}{v_{02}\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{v_{01}}{v_{02}}$. Cum $v_{02} = 2v_{01}$, obținem:

$\frac{d_1}{d_2} = \frac{v_{01}}{2v_{01}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2}.$

c) Aflarea: $\frac{v_1}{v_2} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{v_{01}^2 + 2gh}}{\sqrt{v_{02}^2 + 2gh}}$. Cum $v_{02} = 2v_{01}$,

obținem: $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{v_{01}^2 + 2gh}{4v_{01}^2 + 2gh}} = \sqrt{\frac{v_{01}^2 + 2gh}{2(2v_{01}^2 + gh)}} \rightarrow$

$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{v_{01}^2 + 2gh}{2(2v_{01}^2 + gh)}}.$

BUASM CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

d) Aflarea $\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{gt}{v_{01}} \cdot \frac{v_{02}}{gt} = \frac{v_{02}}{v_{01}} = \frac{2v_{01}}{v_{01}} = 2 \rightarrow \quad \frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = 2$.

12. Se lansează oblic dintr-un punct de pe suprafaţa Pământului, două corpuri de mase egale, de viteză v_{01} şi v_{02}, unde $v_{02} > v_{01}$ sub acelaşi unghi $\alpha = \beta$ faţă de orizontală. S-a notat cu α, unghiul pentru corpul (1) şi β, unghiul pentru corpul (2). Corpurile (1) şi (2) sunt aruncate în acelaşi moment, iar frecările cu aerul sunt neglijabile.

Se cer :

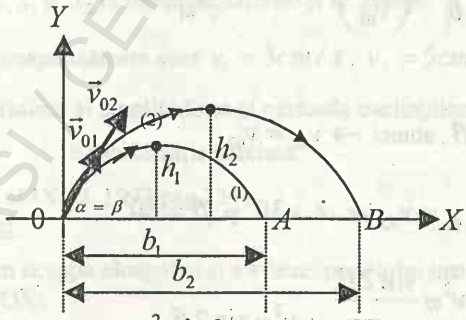
a) Raporturile bătăilor teoretice şi ale înălţimilor maxime, în funcţie de v_{01} şi v_{02} ;

b) Ce relaţie există între v_{01} şi v_{02}, dacă bătăile teoretice ale corpurilor sunt egale între ele ;

c) Considerând că $v_{01} = v_{02}$ iar $\alpha = 30^o$ şi $\beta = 60^o$, să se afle raportul bătăilor teoretice.

Rezolvare:

a) Cum $v_{02} > v_{01}$ şi $\alpha = \beta$, atunci $b_2 > b_1$ şi $h_2 > h_1$ ceea ce ne permite să reprezentăm parabolele corpurilor (1) şi (2):



Bătăile teoretice: $b_1 = \frac{v_{01}^2 \sin 2\alpha}{g} \rightarrow$ pentru corpul (1)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$b_2 = \frac{v_{02}^2 \sin 2\beta}{g} \rightarrow$ pentru corpul (2).

Facem raportul : $\frac{b_2}{b_1} = \frac{v_{02}^2 \sin 2\beta}{g} \frac{g}{v_{01}^2 \sin 2\alpha}$. Cum $\alpha = \beta$, atunci

obținem: $\frac{b_2}{b_1} = \frac{v_{02}^2}{v_{01}^2} = \left(\frac{v_{02}}{v_{01}}\right)^2 \rightarrow \frac{b_2}{b_1} = \left(\frac{v_{02}}{v_{01}}\right)^2$,

Calculul $\frac{h_2}{h_1} = \frac{v_{02}^2 \frac{\sin^2 \beta}{2g}}{v_{01}^2 \frac{\sin^2 \alpha}{2g}} = \frac{v_{02}^2}{v_{01}^2} \bullet \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}$. Cum $\alpha = \beta$ obținem:

$\frac{h_2}{h_1} = \frac{v_{02}^2}{v_{01}^2} = \left(\frac{v_{02}}{v_{01}}\right)^2 \rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{v_{02}}{v_{01}}\right)^2$,

Se constată că $\frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{v_{02}}{v_{01}}\right)^2$, în condițiile când $\alpha = \beta$, iar $v_{02} > v_{01}$.

b) La punctul a) am găsit relația : $\frac{b_2}{b_1} = \left(\frac{v_{02}}{v_{01}}\right)^2$

Cum $b_2 = b_1$ obținem : $\frac{b_1}{b_1} = \left(\frac{v_{02}}{v_{01}}\right)^2 \rightarrow 1 = \frac{v^2{}_{02}}{v^2{}_{01}} \rightarrow v^2{}_{01} = v^2{}_{02} \rightarrow$

$\rightarrow v_{01} = v_{02}$.

Când $b_2 = b_1$ iar $\alpha = \beta$, atunci $\rightarrow v_{01} = v_{02}$.

c) Aflarea $\frac{b_2}{b_1}$ când $v_{01} = v_{02}$ iar $\alpha = 30^o$ și $\beta = 60^o$

Facem raportul: $\frac{b_2}{b_1} = \frac{v^2{}_{02} \frac{\sin 2\beta}{g}}{v^2{}_{01} \frac{\sin 2\alpha}{g}} = \frac{v^2{}_{02} \sin 2\beta}{v^2{}_{01} \sin 2\alpha}$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

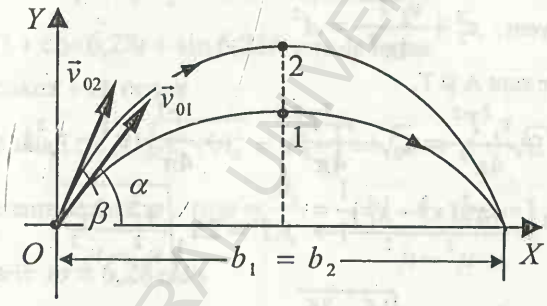
Cum $v_{01} = v_{02}$, obținem: $\frac{b_2}{b_1} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$ unde $\alpha = 30^o$ și $\beta = 60^o$.

$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \rightarrow \frac{b_2}{b_1} = 1$ sau $b_2 = b_1 \rightarrow$ bătaia teoretică b_2 a

corpului (2) este egală cu bătaia teoretică b_1 a corpului (1) când $v_{01} = v_{02}$, iar

$\alpha = 30^o$ și $\beta = 60^o$.

Reprezentarea grafică a traiectoriilor celor două corpuri este:



13. Un punct material oscilează armonic după o lege sinusoidală. Se măsoară elongațiile x_1 și x_2 la momente diferite și se găsește $x_1 = 6$ cm, $x_2 = 4$ cm iar vitezele corespunzătoare sunt $v_1 = 3cm/s$, $v_2 = 5cm/s$.

Să se determine: a) amplitudinea și perioada oscilațiilor armonice;

b) accelerația maximă.

(Fizica, cl.IX ed. 1993 pag.234)

Rezolvare:

a) Scriem ecuația elongației și a vitezei punctului material după axa OX:
După axa OX:

$$\begin{cases} x = A\cos \omega t \text{ și} \\ v = -\omega A \sin \omega t \text{ necunoscute sunt A și T} \end{cases}$$

BCU "SI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} x = A\sin\omega t \text{ şi} \\ v = -\dfrac{2\pi}{T}A\cos\omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin\omega t = \dfrac{x}{A} \\ \cos\omega t = -\dfrac{vT}{2\pi A} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin^2\omega t = \dfrac{x^2}{A^2} \\ \cos^2\omega t = \dfrac{v^2T^2}{4\pi^2A^2} \end{cases}$$

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2T^2}{4\pi^2A^2} \rightarrow \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2T^2}{4\pi^2A^2} = 1$$

sau: $x^2 + \dfrac{v^2T^2}{4\pi^2A^2} = A^2$

Pentru t_1 avem : $x_1^2 + \dfrac{v_1^2T^2}{4\pi^2} = A^2$

Pentru t_2 avem : $x_2^2 + \dfrac{v_2^2T^2}{4\pi^2} = A^2$

Necunoscute sunt A şi T.

$$x_1^2 + \frac{v_1^2T^2}{4\pi^2} = x_2^2 + \frac{v_2^2T^2}{4\pi^2} \quad \rightarrow \frac{T^2}{4\pi^2}(v_1^2 - v_2^2) = x_2^2 - x_1^2$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2(x_2^2 - x_1^2)}{v_1^2 - v_2^2} \rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}.$$

Numeric : $T = 2 \bullet 3{,}14\sqrt{\dfrac{16-36}{9-25}} = 7{,}025s \rightarrow \quad T = 7{,}025s$.

Aflarea lui A din relaţia : $A^2 = x_1^2 + \dfrac{v_1^2T^2}{4\pi^2} = x_1^2 + \dfrac{v_1^2}{4\pi^2} \bullet \dfrac{4\pi^2(x_2^2 - x_1^2)}{v_1^2 - v_2^2} =$

$$= x_1^2 + \frac{v_1^2(x_2^2 - x_1^2)}{v_1^2 - v_2^2} = \frac{x_1^2v_1^2 - x_1^2v_2^2 + v_1^2x_2^2 - v_1^2x_1^2}{v_1^2 - v_2^2} \text{ sau } A = \sqrt{\frac{v_1^2x_2^2 - v_2^2x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}.$$

Numeric: $A = \sqrt{\dfrac{9 \bullet 16 - 25 \bullet 36}{9-25}} = 6{,}87cm \rightarrow A = 6{,}87cm$

b) Aflarea acceleraţiei maxime a_m.

Cum $a_m = \omega^2 A = \dfrac{4\pi^2}{T^2}A$ şi T=7,025 iar A=6,87cm,

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

obținem : $a_m = \frac{4 \bullet 9{,}8^2}{7{,}025^2} \bullet 6{,}87 \neq 4{,}4 \text{ cm/s}^2$

$\rightarrow a_m = 4{,}4 \text{ cm/s}^2$.

14. Un oscilator armonic după direcția 0X are ecuația de mișcare sub forma: $x = 1 + \cos 6{,}28t + \sin 6{,}28t$. Să se determine : amplitudinea, diferența de fază, pulsația și apoi să se scrie ecuația mișcării în funcție de datele calculate.

(Culegere de Gh. Tomescu și P. Ghișoiu, pag.220)

Rezolvare:

Datele problemei: $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $\omega = 6{,}28 \text{ rad/s}$

Ecuația : $x = 1 + \cos 6{,}28t + \sin 6{,}28t$ este de forma:

$x = x_0 + A_1 \cos\omega t + A_2 \cos\omega t$

Aflarea amplitudinii : $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \rightarrow A = \sqrt{2}$

Calculăm diferența de fază φ : $tg\varphi = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \quad tg\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

Pulsația mișcării: $\omega = 6{,}28 \text{ rad/s}$

Ecuația mișcării, cu datele calculate se scrie: $x = 1 + \sqrt{2}\cos\left(6{,}28t - \frac{\pi}{4}\right)$.

15. Capătul liber al unui resort (pendul elastic) execută o mișcare oscilatorie de o parte și de alta a poziției de echilibru, la distanța maximă de 4 cm, cu perioada de oscilație de 4s. În momentul când trece prin poziția de echilibru are viteza $v_0 = 3{,}14$ cm/s. Să se scrie ecuația acestei mișcări, dacă în momentul când trece prin poziția de echilibru are viteza $v_0 = 3{,}14 cm/s$.

(Culegere de Gh. Tomescu și P. Ghișoiu, pag.221)

Rezolvare:

Ecuația mișcării oscilatorii armonice este de forma: $x = A\cos(\omega t - \varphi)$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ştiind pe $T = 4s$, se poate afla $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ rad/s şi atunci:

$$x = 4\cos(\frac{\pi}{2}t - \varphi).$$ Ne trebuie $\varphi = ?$

Scriem ecuaţia vitezei punctului material:

$$v = -\omega A\sin(\omega t - \varphi) = -\frac{\pi}{2} \bullet 4\sin(\frac{\pi}{2}t - \varphi) = -2\pi\sin(\frac{\pi}{2}t - \varphi) \rightarrow$$

$$\rightarrow v = -2\pi\sin(\frac{\pi}{2}t - \varphi).$$

- La $t = 0$ (momentul iniţial) avem: $3{,}14 = -2 \bullet 3{,}14\sin(-\varphi)$

dar $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ şi atunci obţinem:

$$1 = 2\sin\varphi \rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{2} \rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Ecuaţia mişcării oscilatorului armonic va fi:

$$x = 4\cos(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{6})$$

16. O minge de dimensiuni mici, având, un coeficient de restituire k, este aruncată dintr-un punct O, cu viteza v_0 sub un unghi α faţă de sol, presupus orizontal şi imobil. Neglijând frecările şi rezistenţa aerului, mingea cade în A, astfel încât $0A = x_1$. După ciocnire, mingea se deplasează cu viteza v_1, sub unghiul β şi aşa mai departe. Dându-se v_0, α, k să se afle:

a) distanţa totală parcursă de minge;

b) timpul total, până la oprire.

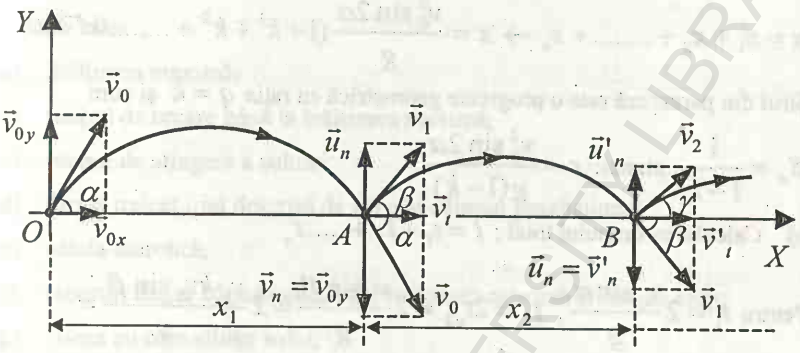
Rezolvare:

a) calcularea spaţiului total.

Spaţiul total $x = x_1 + x_2 + x_3 + ...$ unde:

BCU "ŞTIINŢA CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},\quad x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g},\quad x_3 = \frac{v_0^2 \sin 2\gamma}{g}\quad \ldots\ldots$$



Aflarea lui x_2.

$K = \frac{u_n}{v_n} = \frac{v_1 \sin\beta}{v_0 \sin\alpha} \rightarrow \quad \sin\beta = \frac{kv_0 \sin\beta}{v_1}$. Dar $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta =$

$= \frac{2kv_0 \sin 2\alpha}{v_1}\cos\beta$. Cum, $v_t = v_1\cos\beta = v_0\cos\alpha \rightarrow \cos\beta = \frac{v_0\cos\alpha}{v_1}$

încât $\sin 2\beta = \frac{kv_0^2 \sin 2\alpha}{v_1^2}$. Însă

$$x_2 = \frac{v_1^2 \sin 2\beta}{g} = \frac{v_1^2}{g}\frac{kv_0^2 \sin 2\alpha}{v_1^2} = \frac{kv_0^2 \sin 2\alpha}{g} \rightarrow \quad x_2 = \frac{kv_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Aflarea lui x_3 se face analog şi rezultă $x_3 = \frac{v_2^2 \sin 2\alpha}{g}$

$$k = \frac{u'_n}{v'_n} = \frac{v_2 \sin\gamma}{v_1 \sin\beta}$$

$$v'_t = v_2\cos\gamma = v_1\cos\beta$$

Ştiind: $x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, x_2 = \frac{kv_0^2 \sin 2\alpha}{g}, x_3 = \frac{k^2 v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$,

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$x_4 = \frac{k^3 v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ ..... $x_n = \frac{k^{n-1} v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, putem afla pe

$x = x_1 + x_2 + ... + x_n \rightarrow x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}(1 + k^1 + k^2 + ...k^{n-1})$.

Şirul din paranteză este o progresie geometrică cu raţia $q = k$ şi cum

$S_n = \frac{1}{1-k}$, atunci: $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g(1-k)}$.

b) Calcularea timpului total : $t = t_1 + t_2 + ...t_n$

Pentru $t_1 = 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, $t_2 = 2t_{u2} = 2\frac{v_1 \sin\beta}{g} = 2\frac{v_1}{g}\frac{kv_0 \sin\beta}{v_1} =$

$= k\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$; $t_3 = 2t_{u3} = 2\frac{v_2 \sin\gamma}{g} = 2\frac{v_2}{g}\frac{kv_1 \sin\beta}{v_2} =$

$= 2\frac{kv_1}{g}\frac{kv_0 \sin\alpha}{v_1} = k^2\frac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

Timpurile parţiale aflate sunt:

$t_1 = 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, $t_2 = k\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, $t_3 = k^2\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$,.....,

$t_n = k^{(n-1)}\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ Deci timpul total este:

$t = t_1 + t_2 + ...t_n = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}(1 + k + k^2 + ...k^{k-1})$

Progresia are raţia $q = k$ şi cum $S = \frac{1}{1-k}$, atunci :

$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\frac{1}{1-k} \rightarrow t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g(1-k)}$. Valoarea spaţiului total este

$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g(1-k)}$ şi a timpului: $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g(1-k)}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

17. Un corp este aruncat oblic cu un unghi α față de orizontală, cu viteza inițială v_0.

Să se afle:

a) înălțimea maximă;

b) timpul de urcare până la înălțimea maximă;

c) timpul de atingere a solului;

d) forma traiectoriei descrisă de corp în câmpul gravitațional;

e) bătaia teoretică;

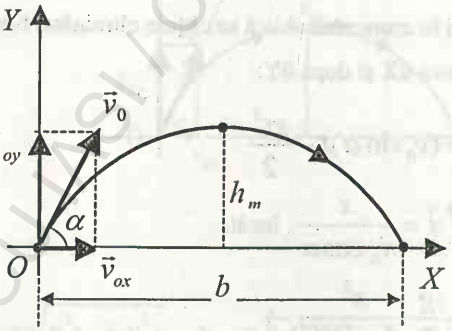
f) raportul dintre bătaia teoretică și înălțimea maximă atinsă de corp;

g) viteza cu care atinge solul;

h) pentru ce unghi α_0 bătaia teoretică este maximă?

Rezolvare:

Aruncarea oblică, până la atingerea h_m, este o mișcare compusă formată dintr-o mișcare rectilinie uniformă cu viteza v_{0x} și alta dintr-o mișcare rectiliniu și uniform încetinită; apoi de la înălțimea maximă h_m, corpul își continuă mișcarea, având o mișcare uniformă pe direcția orizontală cu viteza v_{0x} și una uniform accelerată, pe verticală de sus în jos, fără viteză inițială. Construim traiectoria corpului:



Componentele vitezei v_0:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \rightarrow OX$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha \rightarrow OY$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a) aflarea înălțimii maxime : h_m

$$h_m = v_{0y}t_u - \frac{gt_u^2}{2} = (v_0 \sin\alpha)t_u - \frac{gt_u^2}{2}$$

Ecuația vitezei după 0Y: $v_y = v_{0y} - gt$. La înălțimea maximă $v_y = 0$, încât :

$0 = v_{0y} - gt_u \rightarrow \quad t_u = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \rightarrow \quad t_u = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Înlocuind pe

t_u în expresia lui h_m obținem: $h_m = (v_0 \sin\alpha)\frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{2v_0^2 \sin^2\alpha - v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \rightarrow$$

$$\rightarrow h_m = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

b) –timpul de urcare:

$t_u = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, relația aflată la punctul a)

c) –timpul total:

$$t = t_u + t_c = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \rightarrow \quad t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

d) Ecuația traiectoriei corpului în aruncarea oblică se obține eliminând timpul t din ecuația mișcării după axa 0X și după 0Y:

$x = (v_0 \cos\alpha)t$ și $y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$.

Din : $x = (v_0 \cos\alpha)t \rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$, încât:

$$y = (v_0 \sin\alpha)\frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} \rightarrow$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \rightarrow$$ ecuația traiectoriei.

Funcția de timp y este un polinom de gradul II în x^2 și se reprezintă graficul printr-o parabolă. Coordonatele vârfului V a parabolei sunt:

$$t_u = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \text{ și } h_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

e) Calcularea bătăii teoretice:

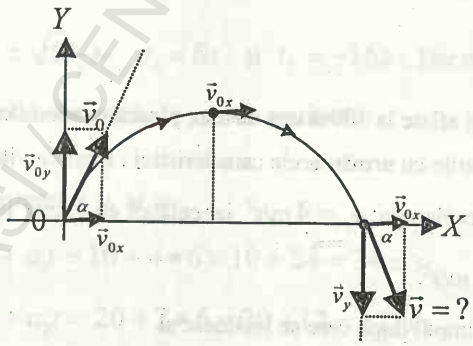
$$b = (v_0 \cos\alpha)t = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

f) $$\frac{b}{h_m} = (\sin 2\alpha)\frac{2}{\sin^2 \alpha} = \frac{2(\sin\alpha\cos\alpha)2}{\sin\alpha\sin\alpha} = 4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 4ctg\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{b}{h_m} = 4ctg\alpha$$

g) viteza cu care corpul atinge solul:



$$v = \sqrt{v^2_{0x} + v^2_y} \quad v_{0x} = v_0 \cos\alpha \quad v_y = gt \quad h_m = \frac{gt^2}{2} \rightarrow \quad t^2 = \frac{2h_m}{g} \rightarrow$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= \frac{2}{g}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} \rightarrow \quad t^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} \rightarrow \quad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Acum se poate afla : $v_y = gt = g\frac{v_0 \sin\alpha}{g} = v_0 \sin\alpha$.

Cunoscând pe $v_y = v_0 \sin\alpha$ şi $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, se poate afla

$$v = \sqrt{v^2{}_{0x} + v^2{}_y} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha} = \sqrt{v_0^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = v_0$$

$\rightarrow v = v_0 \rightarrow$ Corpul atinge Pământul cu viteza cu care a fost lansat în starea iniţială.

h) Aflarea unghiului α_0 pentru care bătaia teoretică b este maximă.

Ştiind că $b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Cum v_0 şi g sunt constante şi pentru ca b să fie maxim trebuie ca $\sin 2\alpha = 1$.

Pentru că $\sin 2\alpha_0 = 1$, trebuie ca $2\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ adică $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$

La unghi $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ bătaia teoretică este maximă şi are valoarea: $b_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

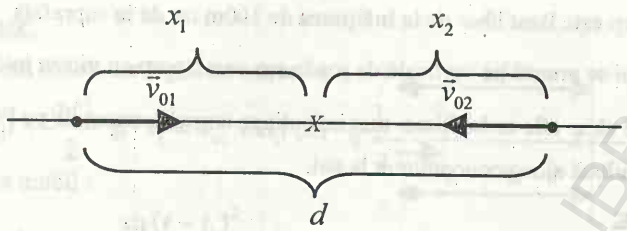
19. Din două localităţi aflate la 300m una de alta, pleacă concomitent, în sensuri contrare corpurile cu următoarele caracteristici : unul cu viteza $v_{01} = 10\,\text{m/s}$ şi are acceleraţia $a_1 = 4\,\text{m/s}^2$ iar celălalt cu viteza $v_{02} = 20\,\text{m/s}$ şi acceleraţia $a_2 = 2\,\text{m/s}^2$.

Se cere : a) timpul după care se întâlnesc şi

b) vitezele lor

Rezolvare:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



a) Legea mişcării şi a vitezei pentru mobilul M_1 :

$$x_1 = v_{01}t + \frac{a_1 t^2}{2}; \quad v_1 = v_{01}t + a_1 t \quad \text{şi}$$

pentru celălalt mobil M_2 :

$$x_2 = v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2} \text{ şi } \quad v_2 = v_{02}t + a_2 t$$

Din figură se vede:

$$x_1 + x_2 = d$$

$$v_{01}t + \frac{a_1 t^2}{2} + v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2} = d$$

$$10t + \frac{4t^2}{2} + 20t + \frac{2t^2}{2} = d \rightarrow \quad 10t + \frac{4}{2}t^2 + 20t + \frac{2}{2}t^2 = 300 \rightarrow$$

$$\rightarrow 10t + 2t^2 + 20t + t^2 = 300 \rightarrow \quad 30t + 3t^2 = 300 \rightarrow$$

$$t^2 + 10t - 100 = 0 \rightarrow \quad t = -5 \pm \sqrt{25 + 100} = -5 \pm \sqrt{25(1+4)} \rightarrow$$

$\rightarrow t = -5 \pm \sqrt{5} \rightarrow \quad t_1 = 6s$ şi $t_2 = -16s$. Dar convine numai soluţia pentru $t_1 = 6s$ deoarece are valoare pozitivă.

b) Aflarea vitezelor v_1 şi v_2 .

$$v_1 = v_{01} + a_1 t = 10 + 4 \bullet 6 = 10 + 24 = 34 \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_{02} + a_2 t = 20 + 2 \bullet 6 = 20 + 12 = 32 \text{ m/s}$$

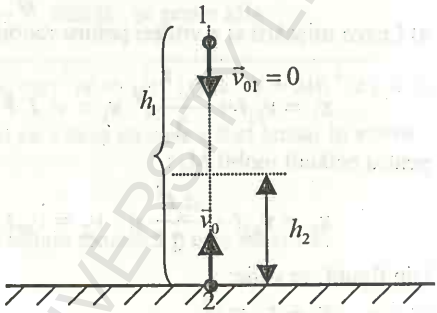
$$\begin{cases} v_1 = 34 \text{ m/s} \\ v_2 = 32 \text{ m/s} \end{cases}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

20. Un corp este lăsat liber de la înălţimea de 100m iar de la suprafaţa Pământului se aruncă pe verticală de jos în sus un alt corp cu viteza iniţială v_0.

Se cere să se afle ce înălţime maximă atinge corpul aruncat de pe Pământ dacă amândouă ajung concomitent la sol.

Rezolvare:



Timpul de coborâre al corpului (1) se află din formula:

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2} \rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Timpul de urcare şi de coborâre a celui de al doilea corp (2) va fi:

$$t_2 = 2t_{u2} = 2\frac{v_0}{g} \rightarrow \quad t_2 = 2\frac{v_0}{g}$$

Întrucât corpurile (1) şi (2) ajung concomitent la sol putem scrie: $t_1 = t_2 \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\frac{v_0}{g} \rightarrow \quad \frac{2h_1}{g} = 4\frac{v_0^2}{g^2} \rightarrow \quad v_0^2 = \frac{gh_1}{2}$$

Pentru aflarea lui h_2 ne folosim de formula:

$$h_2 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{2g} \bullet \frac{gh_1}{2} = \frac{h_1}{4} \rightarrow \quad h_2 = \frac{h_1}{4} = \frac{100}{4} = 25\,\text{m} \rightarrow h_2 = 25\,\text{m}$$

21. Dintr-o localitate pleacă în acelaşi sens două corpuri în mişcare uniform accelerată cu vitezele iniţiale: unul cu $v_{01} = 10$ m/s şi acceleraţia $a_1 = 3$ m/s^2 iar celălalt cu o întârziere de 10s, cu $v_{02} = 5$ m/s şi $a_2 = 2$ m/s^2.

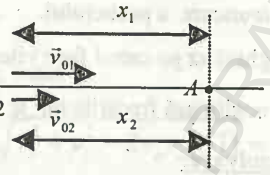
Se cer : a) timpul de întâlnire a corpurilor

b) vitezele la întâlnire.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:

a) Primul mobil are legile de mişcare:



$x_1 = v_{01}t + \frac{a_1 t^2}{2}$ şi $v_1 = v_{01} + a_1 t$,iar

al doilea mobil :

$x_2 = v_{02}(t - t_1) + \frac{a_2 (t - t_1)^2}{2}$ şi $v_2 = v_{02} + a_2 (t - t_1)$

Întrucât corpurile se întâlnesc: $x_1 = x_2 \rightarrow$

$v_{01}t + \frac{a_1 t^2}{2} = v_{02}(t - t_1) + \frac{a_2}{2}(t - t_1)$. Introducem valorile mărimilor cunoscute şi obţinem:

$$10t + \frac{3}{2}t^2 = 5(t-10) + \frac{2}{2}(t-10)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 10t + 1{,}5t^2 = 5t - 50 + t^2 - 20t + 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5t + 0{,}5t^2 + 20t - 50 = 0 \rightarrow \quad 25t + 0{,}5t^2 - 50 = 0 \rightarrow$$

$$250t + 5t^2 - 500 = 0 \rightarrow \quad 50t + t^2 - 100 = 0 \rightarrow \quad t^2 + 50t - 100 = 0$$

$$t = -25 \pm \sqrt{625 + 500} = -25 \pm \sqrt{25(25+4)} = -25 \pm 5\sqrt{29} \rightarrow$$

$t_1 = -25 + 5\sqrt{29} > 0$; $t_2 = -25 - 5\sqrt{29} < 0$; (negativ)

$t = 5(-5 + \sqrt{29}) = 5(\sqrt{29} - 5) = 5 \bullet 0{,}3 = 1{,}5s$ Se consideră numai soluţia pozitivă: $t = 1{,}5s$.

b) $v_1 = v_{01} + a_1 t = 10 + 3 \bullet 1{,}5 = 10 + 4{,}5 = 14{,}5m/s \rightarrow v_1 = 14{,}5m/s$

$v_2 = v_{02} + a_2 t = 5 + 2 \bullet 1{,}5 = 5 + 3 = 8m/s \rightarrow v_2 = 8m/s$

22) Dintr-un avion sanitar, care se deplasează pe direcţia orizontală cu viteza de 90km/h şi la o altitudine de 250m, trebuie să se lanseze într-un punct anume pe Pământ un pachet. Să se afle:

a) timpul cât face pachetul până la sol;

b) viteza cu care pachetul atinge Pământul;

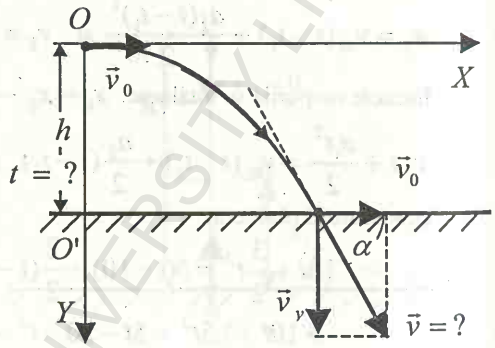
BCU MSI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) distanţa măsurată de la punctul căderii pe sol, la verticala dusă din punctul de aruncare a pachetului.

d) Unghiul α pe care-l face viteza cu direcţia orizontală.

Se neglijează frecările iar $g = 10\,\text{m/s}^2$.

Rezolvare:



a) $h = \dfrac{gt^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} =$

$= \sqrt{\dfrac{2 \bullet 250}{10}} = 5\sqrt{2} =$

$= 5 \bullet 1{,}41 = 7{,}05s \cong 7s$

b) $v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2}$ $v_y = gt = 10 \bullet 7 = 70\,\text{m/s}$

$v = \sqrt{625 + 4900} = 77\,\text{m/s}$, $v = 77\,\text{m/s}$.

c) $d = v_0 t = 25 \bullet 7 = 175\,\text{m}$, $d = 175\,\text{m}$.

d) $tg\alpha = \dfrac{v_y}{v_0} = \dfrac{gt}{v_0} \rightarrow tg\alpha = \dfrac{gt}{v_0}$,

Numeric: $tg\alpha = \dfrac{10 \bullet 7}{25} = \dfrac{70}{25} = \dfrac{14}{5} \rightarrow tg\alpha = 2{,}8 \rightarrow \alpha = arctg2{,}8$.

23. Un călător se află într-un tren ce merge cu viteza $v_1 = 60\,\text{km/h}$ şi priveşte un alt tren care trece în sens contrar cu viteza $v_2 = 90\,\text{km/h}$ şi care are lungimea de 500m. Să se determine cât timp călătorul din primul tren va vedea trenul al doilea?

Rezolvare:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Conținutul problemei face parte din mișcarea relativă a corpurilor și cum cele două corpuri au sensuri contrare putem scrie:

$\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_t$ iar modulul vitezei relative $\vec{v}_r$ este:

$$|\vec{v}_r| = v_r = \sqrt{v_a^2 + v_t^2 - 2v_a v_t \cos 180^o} = \sqrt{v_a^2 + v_t^2 - 2v_a v_t(-1)} =$$

$$\sqrt{v_a^2 + v_t^2 + 2v_a v_t} = \sqrt{v_a^2 + v_t^2 + 2v_a v_t} = \sqrt{(v_a + v_t)^2} = v_a + v_t \rightarrow$$

$$\rightarrow v_r = v_a + v_t .$$

În cazul nostru vom avea : $v_r = v_1 + v_2$.

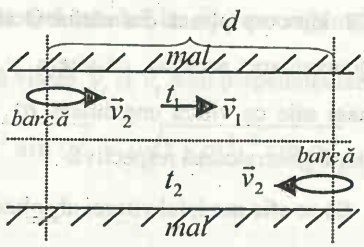
Ecuația de mișcare pentru al doilea tren va fi:

$$l = v_r t = (v_1 + v_2)t \rightarrow \quad t = \frac{l}{v_1 + v_2} .$$

Numeric: $t = \dfrac{500}{\dfrac{50}{3} + 25} = 12s$.

Călătorul din primul tren îl va vedea pe al doilea timp de 12s.

24. Un luntraș aflat într-o barcă, parcurge o distanță d în direcția cursului unui râu în timpul t_1 și aceiași distanță împotriva curentului în t_2 . Să se afle viteza v_2 a bărcii în raport cu apa și viteza v_1 a curentului apei.



Notăm: $v_1 \rightarrow$ vitezei apei râului

$v_2 \rightarrow$ viteza bărcii

Problema se încadrează în mișcarea relativă.

Mișcarea bărcii față de apă este relativă, având viteza relativă $v_r = v_2$, mișcarea apei față de mal este o mișcare de transport, având $v_t = v_1$, iar

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

mişcarea bărcii faţă de mal este o mişcare absolută cu viteza v_a.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$$

$$|\vec{v}_a| = v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos\alpha}\ .$$

a) Când barca se deplasează în sensul curentului râului:

$$\alpha = 0^0,\ \cos 0^0 = 1$$

$$v_a = \sqrt{(v_r + v_t)^2} = v_r + v_t = v_2 + v_1$$

b) Când barca se deplasează în sens contrar curentului râului:

$$\alpha = 180^0,\ \cos 180^0 = -1,\ \text{iar}\ v_a = v_2 - v_1$$

Considerând mişcarea bărcii uniformă, atunci în cazul (1) şi (2) vom avea :

$$\frac{d}{t_1} = v_1 + v_2 \ \text{şi}\ \frac{d}{t_2} = v_2 - v_1$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuaţii, vom afla: $v_1 = \dfrac{d(t_2 - t_1)}{2t_1t_2}$ şi

$$v_2 = \frac{d(t_1 + t_2)}{2t_1t_2}$$

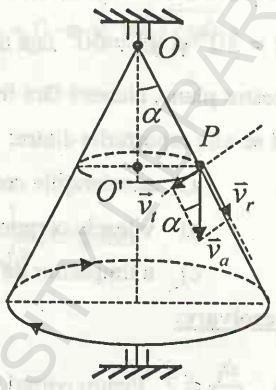
25. Un corp pleacă din vârful O al unui con şi arc o mişcare uniformă după generatoarea acestuia, cu viteza v, însă şi conul se roteşte uniform în jurul axei sale cu viteza unghiulară ω, ajungând în intervalul t într-un punct P după generatoarea respectivă.

Să se afle modulul vitezei absolute $\vec{v}_a$

a corpului în P după timpul t de începere a rotaţiei conului în jurul axei sale şi cu viteza unghiulară ω.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:



După timpul t, corpul se găseşte în P şi $OP = vt$. Menţionăm că mişcarea corpului de-a lungul generatoarei conului este o mişcare relativă, având $v_r = v$. Mişcarea de transport este mişcarea de rotaţie a conului în jurul axei sale şi împreună cu corpul în P imobil pe generatoare.

Forma traiectoriei de transport la momentul t este un cerc, cu centru în O' adică tocmai proiecţia P pe axa conului.

În acest caz viteza de transport este : $v_t = \omega \bullet O'P$.

Cum $\sin\alpha = \dfrac{O'P}{OP} \rightarrow O'P = OP \bullet \sin\alpha$.

Din $v_t = \omega \bullet O'P = \omega \bullet OP \sin\alpha$. Dar $OP = vt$ şi atunci:

$v_t = v\omega t \sin\alpha$.

Mişcarea absolută a corpului în P este mişcarea sa faţă de axa conului. Viteza absolută $\vec{v}_a$ reprezintă tocmai suma vectorială dintre $\vec{v}_r$ şi $\vec{v}_t$, adică $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$. Viteza $\vec{v}_r$ are direcţia generatoarei conului, iar $\vec{v}_t$ este tangentă în P la cercul cu raza $O'P$. Cum cele două viteze $\vec{v}_r$ şi $\vec{v}_t$ sunt perpendiculare atunci: $v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = \sqrt{v^2 + v^2\omega^2 t^2 \sin\alpha^2} = v\sqrt{1 + \omega^2 t^2 \sin\alpha^2}$

$\rightarrow v_a = v\sqrt{1 + \omega^2 t^2 \sin\alpha^2}$.

De menţionat că viteza v_r este tocmai viteza corpului v de-a lungul generatoarei conului.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

26. Considerăm sistemul mecanic format din două plane înclinate, de unghiuri $\alpha = 30^0$ şi $\beta = 60^0$ faţă de orizontală şi care lăsate liber din vârful comun al acestor plane, alunecă fără frecare până ating solul cu vitezele corespunzătoare. Să se afle raporturile dintre:

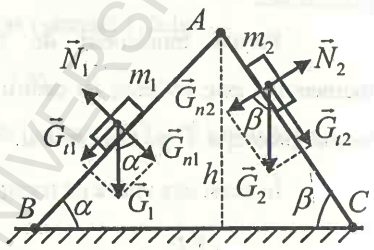
a) acceleraţiile corpurilor;

b) vitezele corpurilor ;

c) a timpurilor de parcurgere a planelor înclinate

Rezolvare:

a) $\frac{a_1}{a_2} = ?$ Pentru corpul de masă m_1:



$G_{t1} = m_1 a_1 \rightarrow m_1 g \sin\alpha = m_1 a_1 \rightarrow$

$a_1 = g \sin\alpha$

Pentru corpul de masă m_2:

$G_{t2} = m_2 a_2 \rightarrow m_2 g \sin\beta = m_2 a_2 \rightarrow \quad a_2 = g \sin\beta$

Facem raportul: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{g\sin\alpha}{g\sin\beta} = \frac{\sin 30^o}{\sin 60^o} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

b) $\frac{v_1}{v_2} = ?$ Aplicăm legea conservării energiei: E=const.

Pentru corpul de masă m_1:

$E_{c1}^A + E_{P1}^A = E_{c1}^B + E_{P1}^B \rightarrow 0 + m_1 g h_1 = \frac{m v_1^2}{2} + 0 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$

Pentru corpul de masă m_2:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E_{c2}^A + E_{P2}^A = E_{c2}^B + E_{P2}^B \rightarrow 0 + m_2 g h_2 = \frac{m v_2^2}{2} + 0 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh}} = 1 \rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = 1$$

c) $\frac{t_1}{t_2} = ?$ $\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1 t_1}{a_2 t_2}$. Cum $\frac{v_1}{v_2} = 1$ şi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, obţinem:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{t_1}{t_2} \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{3}.$$

27). Se aruncă, un corp de la baza unui plan înclinat de unghi α, de jos în sus, fără frecare până se opreşte. Se lasă liber şi coboară în acelaşi punct.

Să se afle raportul dintre:

a) acceleraţia la urcare şi acceleraţia la coborâre.

b) viteza la urcare şi viteza la coborâre.

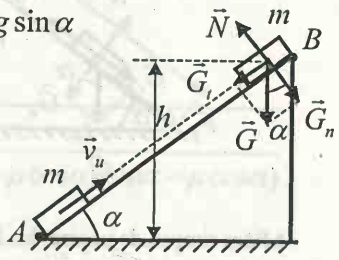
Rezolvare:

a) În A: $G_t = -ma_u \rightarrow \quad mg \sin\alpha = -ma_u \rightarrow \quad a_u = -g \sin\alpha$.

În B:

$G_t = ma_c \rightarrow \quad mg \sin\alpha = ma_c \rightarrow \quad a_c = g \sin\alpha$

$$\frac{a_u}{a_c} = \frac{g \sin\alpha}{g \sin\alpha} = -1 \rightarrow \frac{a_u}{a_c} = -1.$$



b) Aplicăm legea conservării energiei mecanice din A în B:

$$E_c^A + E_p^A = E_c^B + E_p^B \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{m v_u^2}{2} + 0 = 0 + mgh \rightarrow v_u = \sqrt{2gh}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din B în A:

$$E_c^B + E_p^B = E_c^A + E_p^A \rightarrow 0 + mgh = \frac{mv_c^2}{2} + 0 \rightarrow v_c = \sqrt{2gh}\,.$$

$$\frac{v_u}{v_c} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh}} = 1 \rightarrow \frac{v_u}{v_c} = 1\,.$$

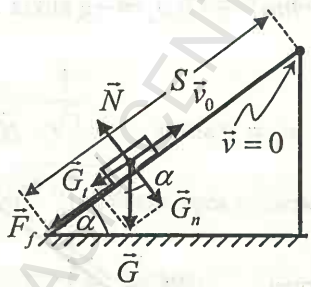
28. Se aruncă un corp cu viteza inițială v_0 de-a lungul unui plan înclinat de unghi α, de jos în sus. Între timpurile de urcare t_u și de coborâre t_c există relația $t_c = nt_u$. Să se determine:

a) Coeficientul de frecare μ dintre corp și planul înclinat

b) Se așează același corp pe planul înclinat și i se imprimă planului o accelerație a în așa fel ca corpul să înceapă să urce pe planul înclinat. Să se determine accelerația corpului pe planul înclinat. Se neglijează frecarea între planul înclinat și Pământ.

Rezolvare:

a)



Se află accelerația la urcare a_u.

Cum forța motoare nu există, putem scrie legea a II-a a dinamicii:

$$0 - G_t - F_f = m \bullet a_u \rightarrow$$

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_u \rightarrow$$

$$a_u = -g(\sin\alpha + \mu\cos)\,.$$

Aflăm timpul de urcare din legea vitezei : $0 = v_0 + a_u t_u \rightarrow t_u = \frac{-v_0}{a_u} \rightarrow$

$$\rightarrow t_u = \frac{-v_0}{-g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \rightarrow$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$t_u = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

Aflarea spațiului de oprire pe planul înclinat S.

Ne folosim de relația Galileo-Galilei: $0 = v_0^2 + 2a_u S \rightarrow$

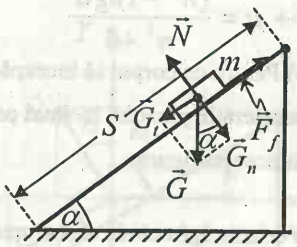
$$S = \frac{-v_0^2}{2a_u} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \rightarrow S = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

Calculăm timpul de coborâre t_c:

Spațiul la coborâre fiind același cu cel de la urcare, vom putea scrie legea mișcării la coborârea corpului din repaus spre baza planului înclinat:

$$S = \frac{a_c t_c^2}{2}.$$

Cum $G_t > F_f$ și aplicând legea a II a dinamicii, obținem: $G_t - F_f = ma_c \rightarrow$



$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_c$$
$$mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = ma_c$$
$$a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Întrucât : $S = \frac{a_c t_c^2}{2} \rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2s}{a_c}} \rightarrow$

$$\rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2\frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}}{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}}$$

$$= \frac{v_0}{g\sqrt{(\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha)}}; \rightarrow \quad t_c = \frac{v_0}{g\sqrt{(\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha)}}$$

B.C.U. "M. EMINESCU" IAȘI FIZICĂ

BCU IAȘI CENTRALUNIVERSITY LIBRARY

În relația $t_c = nt_u$, introducem pe t_c și t_u și găsim:

$$\frac{v_0}{g\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}} = \frac{nv_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha} = \frac{n^2}{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)^2} \rightarrow \frac{1}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = \frac{n^2}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = n^2 \rightarrow \frac{(\cos\alpha)(tg\alpha + \mu)}{(\cos\alpha)(tg\alpha - \mu)} = n^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{tg\alpha + \mu}{tg\alpha - \mu} = n^2 \rightarrow n^2 tg\alpha - \mu n^2 = tg\alpha + \mu \rightarrow$$

$$\rightarrow n^2 tg\alpha - tg\alpha = \mu + \mu n^2 \rightarrow (n^2 - 1)tg\alpha = \mu(n^2 + 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu = \frac{(n^2 - 1)tg\alpha}{n^2 + 1}$$

b) Pentru ca corpul să înceapă să urce pe planul înclinat, trebuie să i se aplice o accelerație planului înclinat perpendiculară pe cateta verticală, așa cum este indicat pe figură:

Varianta I. (metoda descompunerii forțelor pe planul înclinat)

Începerea urcării are loc când:

$F_t = G_t + F_f$ unde:

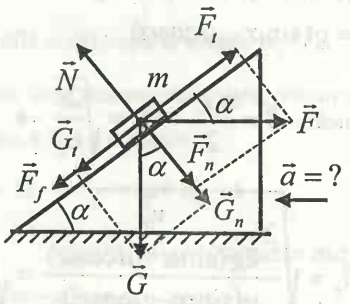
$F_t = F_i \cos\alpha = ma\cos\alpha$

$G_t = mg\sin\alpha$ și

$F_f = \mu N = \mu(F_n + G_n)$

$F_f = \mu(F_i \sin\alpha + mg\cos\alpha)$

$F_f = \mu(ma\sin\alpha + mg\cos\alpha) \rightarrow F_f = m\mu(a\sin\alpha + g\cos\alpha)$



BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Înlocuind pe F_t, G_t şi F_f în relaţia : $F_t = G_t + F_f$ obţinem:

$$ma\cos\alpha = mg\sin\alpha + m\mu(a\sin\alpha + g\sin\alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow a\cos\alpha = g\sin\alpha + \mu a\sin\alpha + \mu g\sin\alpha) \rightarrow$$

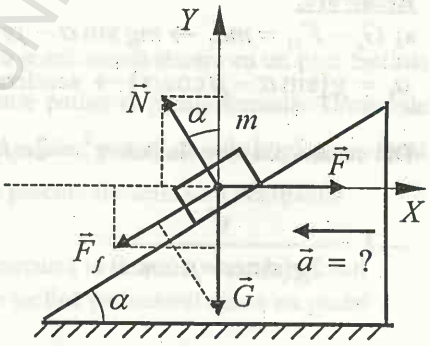
$$\rightarrow a(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \rightarrow$$

$$a = \frac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \frac{g(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \mu)\cos\alpha}{(1 - \mu\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})\cos\alpha} = g\frac{tg\alpha + \mu}{1 - \mu tg\alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = g\frac{tg\alpha + \mu}{1 - \mu tg\alpha}.$$

Varianta II. (metoda proiecţiilor forţelor)

Se ia un sistem de axe de coordonate XOY, se reprezintă forţele ce acţionează asupra corpului şi apoi se proiectează relaţia vectorială pe axele 0X şi 0Y.



$$\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$$

0X:

$$F + 0 - N\sin\alpha - F_f\cos\alpha = 0$$

$$-ma = N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha = 0$$

$$-ma = N(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 0 \quad (1)$$

0Y:

$$0 - mg + N\cos\alpha - F_f\sin\alpha = 0 \quad -mg + N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha = 0 \rightarrow$$

$$-ma + N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = mg \quad (2)$$

Împărţim relaţiile (1) şi (2):

$$\frac{ma}{mg} = \frac{N(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} \rightarrow \quad \frac{a}{g} = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

$$a = g\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = g\frac{(\cos\alpha)(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \mu)}{(\cos\alpha)(1 - \mu tg\alpha)} = g\frac{tg\alpha + \mu}{1 - \mu tg\alpha} \rightarrow$$

BCU MSU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow a = g\frac{tg\alpha + \mu}{1 - \mu tg\alpha}.$$

S-a găsit aceiaşi relaţie pentru acceleraţie atât prin varianta I, cât prin varianta II.

29. Un corp de masă m, pleacă din repaus pe un plan înclinat. La capătul planului, corpul atinge viteza v. Unghiul planului înclinat cu orizontala este α, iar coeficientul de frecare pe tot traseul corpului este μ.

Să se calculeze:

a) lungimea planului înclinat;

b) energia potenţială a corpului la $\frac{h}{4}$ din pantă;

c) energia cinetică la finele pantei ;

d) lungimea drumului parcurs pe orizontală până la oprire.

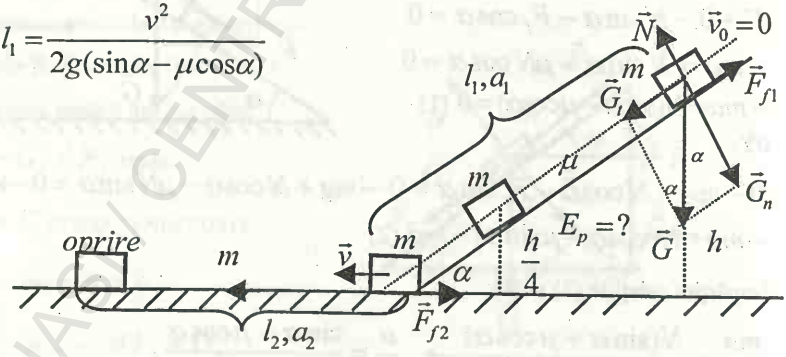
Rezolvare:

a) $G_t - F_{f1} = ma_1 \rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\sin\alpha = ma_1 \rightarrow$

$a_1 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \rightarrow$ acceleraţia corpului pe planul înclinat

Din ecuaţia Galileo-Galilei: $v^2 = 2a_1 l_1 \rightarrow l_1 = \frac{v^2}{2a_1} = \frac{v^2}{2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} \rightarrow$

$$\rightarrow l_1 = \frac{v^2}{2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$



b) $E_p = mg\frac{h}{4}$; $\sin\alpha = \frac{h}{l_1} \rightarrow h = l_1\sin\alpha$, atunci

$$E_p = mg\frac{1}{4}l_1\sin\alpha = \frac{mg}{4}\frac{v^2\sin\alpha}{2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = \frac{mgv^2\sin\alpha}{8g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow E_p = \frac{mv^2 \sin\alpha}{8(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = \frac{mv^2 \sin\alpha}{8(\sin\alpha)(1-\mu ctg\alpha)} = \frac{mv^2}{8(1-\mu ctg\alpha)}.$$

c) $E_c = \frac{mv^2}{2}$

d) $l_2 = ?$ Corpul pe plan orizontal are o mişcare uniform încetinită, încât

$$0 = v^2 + 2a_2 l_2 \rightarrow l_2 = \frac{-v^2}{2a_2}$$

Neexistând forţe motoare putem scrie: $0 - F_{f2} = ma_2 \rightarrow -\mu_2 g = ma_2$

$a_2 = -\mu_2 g$ Înlocuind pe $a_2 = -\mu_2 g$ în

$$l_2 = \frac{-v^2}{2a_2} = \frac{-v^2}{2(-\mu g)} = \frac{v^2}{2\mu g} \rightarrow \quad l_2 = \frac{v^2}{2\mu g}$$

30. Un patinator pleacă din repaus pe o pantă asemănătoare cu un plan înclinat de unghi α şi cu frecare neglijabilă între patine şi gheaţa formată. Timpul de parcurgere a pantei este t. Ajungând la capătul pantei, descrie în plan orizontal un arc de cerc de rază R. Pe tot drumul parcurs frecările sunt neglijabile.

Se cer:

a) acceleraţia, lungimea pantei parcursă în timpul t viteza la capătul pantei şi unghiul β cu care se înclină patinatorul spre a nu părăsi arcul de cerc.
b) Acceleraţia normală pe arcul de cerc, viteza unghiulară, frecvenţa şi perioada.

Rezolvare:

a) Patinatorul are o mişcare uniform accelerată fără viteză iniţială ($v_0 = 0$).

Calcularea acceleraţiei: $G_t = ma \rightarrow \quad \not{m}g\sin\alpha = \not{m}a \rightarrow a = g\sin\alpha$

Cum $S = \frac{at^2}{2}$ şi $a = g\sin\alpha \rightarrow S = \frac{1}{2}g(\sin\alpha)t^2$;

$v = at = (g\sin\alpha)t$, $tg\beta = \frac{v^2}{gR} \rightarrow \beta = arctg\frac{v^2}{gR}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

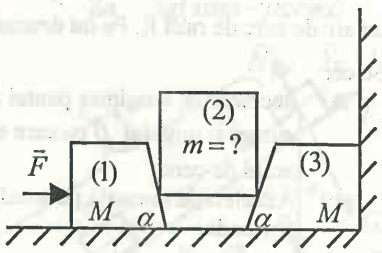
$$\begin{cases} a = g\sin\alpha \\ S = \dfrac{1}{2}g(\sin\alpha)t^2 \\ v = (g\sin\alpha)t \\ \beta = arctg\dfrac{v^2}{Rg} \end{cases}$$

b) a_n, ω, υ şi T se calculează cu formulele:

$$a_n = \frac{v^2}{R};\quad \omega = \frac{v}{R};\quad \upsilon = \frac{\omega}{2\pi};\quad T = \frac{1}{\upsilon};$$

31. Se consideră un sistem mecanic, aflat iniţial în repaus, format din trei plane: planul (1) şi (3) de masă fiecare M, iar planul (2) de masă m, necunoscută conform figurii.

Se aplică planului (1) o forţă de $F = Mg$, încât acesta va căpăta o acceleraţie a_1. În cazul când toate frecările sunt neglijabile în unghiul de înclinaţie α, să se afle masa planului (2) m, cât şi acceleraţia a_2.

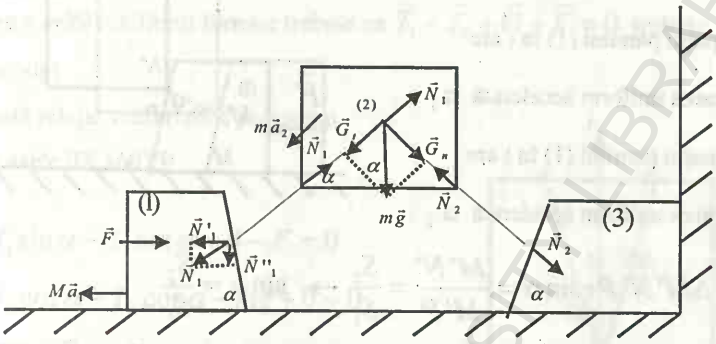


Rezolvare:

Prin aplicarea forţei $F = Mg$, planul (1) va căpăta o acceleraţie a_1, planul (2) va căpăta o acceleraţie a_2, iar planul (3) va rămâne în repaus. Interesează să aflăm m şi a_2, caracteristice referitoare la planul (2).

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Vom folosi metoda izolării planelor date:



Pentru planul (1): $F = Ma_1 + N'_1 = Ma_1 + N_1 \sin\alpha$; iar

pentru planul (2): $N_1 = G_t + ma_2 = mg\sin\alpha + ma_2$.

Înlocuim pe $F = Mg$ şi $N_1 = mg\sin\alpha + ma_2$ în relaţia :

$F = Ma_1 + N_1 \sin\alpha \rightarrow \quad Mg = Ma_1 + (mg\sin\alpha + ma_2)\sin\alpha =$

$= Ma_1 + mg\sin^2\alpha + ma_2 \sin\alpha \rightarrow Mg = Ma_1 + ma_2 \sin\alpha + mg\sin^2\alpha$

Nu cunoaştem a_2 şi m şi de aceea ne vom folosi de legile mişcării uniform accelerate, ale planelor (1) şi (2) :

$S_1 = \dfrac{a_1 t^2}{2}$ pentru planul (1) şi $S_2 = \dfrac{a_2 t^2}{2}$ pentru planul (2).

Prin eliminarea timpului t obţinem : $t^2 = \dfrac{2S_1}{a_1}$ şi $t^2 = \dfrac{2S_2}{a_2} \rightarrow$

$\dfrac{2S_1}{a_1} = \dfrac{2S_2}{a_2} \rightarrow \dfrac{S_1}{a_1} = \dfrac{S_2}{a_2} \rightarrow \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{a_2}{a_1}$. Trebuie calculat raportul: $\dfrac{S_2}{S_1}$.

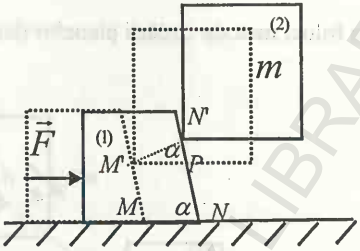
Pentru aceasta vom schiţa poziţia planelor (1) şi (2) la timpul t:

$S_1 = MN \rightarrow$ spaţiu plan (1)

$S_2 = M'N' \rightarrow$ spaţiu plan (2)

S_1 spaţiu panului (1) în t are mişcarea uniform accelerată a_1.

S_2 spaţiu panului (1) în t are mişcarea uniform accelerată a_2.



Din $\Delta M'N'P: \sin\alpha = \frac{M'N'}{M'P} = \frac{S_2}{S_1} \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{S_2}{S_1}$

Această formulă: $\sin\alpha = \frac{S_2}{S_1}$, o înlocuim în relaţia de mai sus: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{a_2}{a_1}$ şi obţinem: $\sin\alpha = \frac{a_2}{a_1}$, încât $a_2 = a_1 \sin\alpha$.

Relaţia $a_2 = a_1 \sin\alpha$ o înlocuim în $Mg = Ma_1 + ma_2 \sin\alpha + mg\sin^2\alpha \rightarrow$

$$\rightarrow Mg = Ma_1 + ma_1 \sin\alpha\sin\alpha + mg\sin^2\alpha = Ma_1 + ma_1 \sin^2\alpha + mg\sin^2\alpha =$$

$$= Ma_1 + m(a_1 \sin^2\alpha + g\sin^2\alpha) \rightarrow Mg - Ma_1 = m(a_1 \sin^2\alpha + g\sin^2\alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow M(g - a_1) = m(a_1 \sin^2\alpha + g\sin^2\alpha) \rightarrow m = \frac{M(g-a_1)}{a_1 \sin^2\alpha + g\sin^2\alpha} \rightarrow$$

$$m = \frac{M(g-a_1)}{a_1 \sin^2\alpha + g\sin^2\alpha} = \frac{M(g-a_1)}{(a_1+g)\sin^2\alpha} \rightarrow m = \frac{M(g-a_1)}{(g+a_1)\sin^2\alpha}.$$

Răspunsurile sunt: $m = \frac{M(g-a_1)}{(g+a_1)\sin^2\alpha}$ şi $a_2 = a_1 \sin\alpha$.

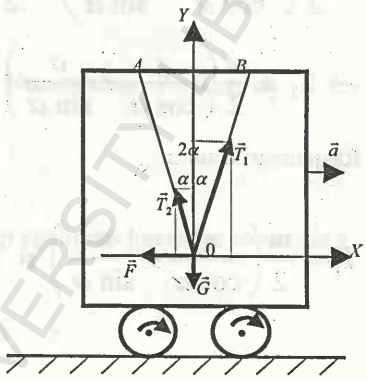
32. De tavanul unui vagon este suspendat un corp de masă m prin intermediul a două fire de aceiaşi lungime, aşezate simetric în plan vertical al mişcării cu unghiul de deschidere 2α. Care vor fi tensiunile din fire, atunci când vagonul merge cu acceleraţia $a = 4{,}9$ m/s^2 (Culegere Hristiev pag.7 ed. 1983)

BUCUREŞTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:

Pentru a avea echilibrul forțelor trebuie ca $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} + \vec{F} = 0$ (relație vectorială)

Această relație vectorială o proiectăm după axele 0X și 0Y



0x: $T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha + 0 - F = 0$

0y: $T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\alpha - mg + 0 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha = ma \\ T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\alpha = mg \end{cases}$$

Prin rezolvarea sistemului, aflăm pe T_1 *şi* T_2.

Din prima ecuație a sistemului :

$$T_1 \sin\alpha - ma = T_2 \sin\alpha \rightarrow \quad T_1 - \frac{ma}{\sin\alpha} = T_2 \quad (1).$$

Din a doua ecuație a sistemului :

$$T_2 \cos\alpha = mg - T_1 \cos\alpha \rightarrow \quad T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha} - T_1 \quad (2)$$

Egalăm (1) cu (2) și obținem:

$$T_1 - \frac{ma}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} - T_1 \rightarrow 2T_1 = m\left(\frac{g}{\cos\alpha} + \frac{a}{\sin\alpha}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow T_1 = \frac{1}{2} m\left(\frac{g}{\cos\alpha} + \frac{a}{\sin\alpha}\right)$$

Înlocuim pe T_1 în relația (2) și aflăm pe T_2.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}m\left(\frac{g}{\cos\alpha} + \frac{a}{\sin\alpha}\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{2mg}{\cos\alpha} - \frac{g}{\cos\alpha} - \frac{a}{\sin\alpha}\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{2g-g}{\cos\alpha} - \frac{a}{\sin\alpha}\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{\cos\alpha} - \frac{a}{\sin\alpha}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow T_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{\cos\alpha} - \frac{a}{\sin\alpha}\right).$$

Răspunsurile sunt:

$$T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{\cos\alpha} + \frac{a}{\sin\alpha}\right) \text{ și } T_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{\cos\alpha} - \frac{a}{\sin\alpha}\right)$$

33. În sistemul din figura de mai jos, scripeții sunt ideali. Să se determine accelerațiile corpurilor și tensiunile din fire dacă masele corpurilor sunt m_1 și m_2. (Culegere Hristiev pag. 8 ed. 1983).

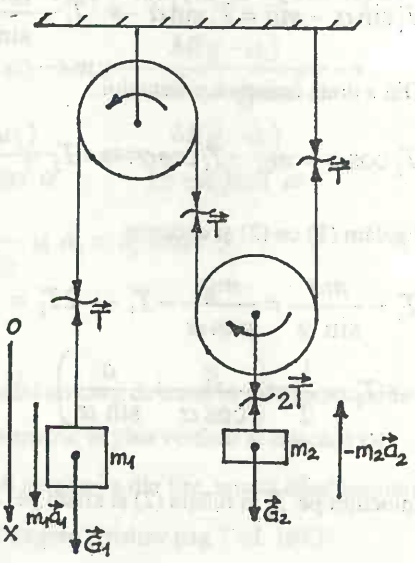
Datele problemei:

Cunoscute: m_1 și m_2

Necunoscute: T_1 și T_2

Rezolvare:

Aplicăm pe rând legea II la fiecare corp în parte:



m_1

$G_1 - T = m_1 a_1 \rightarrow$

$\rightarrow m_1 g - T = m_1 a_1$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

m_2

$2T - G_2 = -m_2 a_2 \rightarrow$

$\rightarrow 2T - m_2 g = -m_2 a_2$

Avem sistemul : $\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ 2T - m_2 g = -m_2 a_2 \end{cases}$ Necunoscute: T, a_1 şi a_2

Ne mai trebuie o relaţie pe care o scoatem din egalitatea lucrurilor mecanice a forţelor de tensiune mecanică:

$L_1 = L_2 \rightarrow \quad TS_1 = -2TS_2 \rightarrow \quad S_1 = -2S_2 \rightarrow$

$a_1 \frac{t^2}{2} = -2a_2 \frac{t^2}{2} \rightarrow \quad a_1 = -2a_2$

Şi acum sistemul devine:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ 2T - m_2 g = -m_2 a_2 \\ a_1 = -2a_2 \end{cases}$$ Necunoscute: T, a_1 şi a_2

Prin rezolvarea sistemului obţinem :

$a_1 = 2g \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}$;

$a_2 = -\frac{a_1}{2} = -\frac{1}{2} 2g \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} = g \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}$ şi $T = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}$.

34. Să se afle acceleraţiile corpurilor de mase m_1 şi m_2 din sistemul mecanic de mai jos. (Culegere Hristiev pag.9 ed. 1983)

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

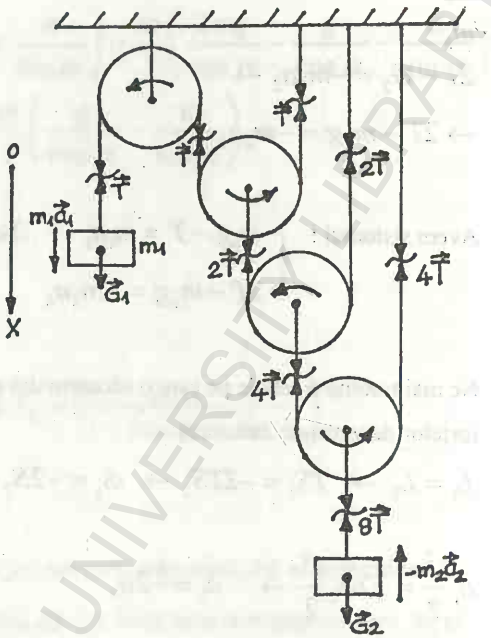
Datele problemei: m_1 şi m_2

şi calcularea a_1 şi a_2

Rezolvare:

Aplicăm pe rând legea II

fiecărui corp în parte:



m_1

$$m_1 g - T = m_1 a_1$$

m_2

$$8T - m_2 g = -m_2 a_2$$

Din lucrurile mecanice ale

forţelor de tensiune:

$$L_1 = TS_1, L_2 = -8TS_2$$

Cum $L_1 = L_2 \rightarrow$

$$\rightarrow TS_1 = -8TS_2 \rightarrow \quad S_1 = -8S_2$$

Dar : $S_1 = a_1 \frac{t^2}{2}$ şi $S_2 = a_2 \frac{t^2}{2}$ încât:

$$a_1 \frac{t^2}{2} = -8a_2 \frac{t^2}{2} \rightarrow \quad a_1 = -8a_2$$

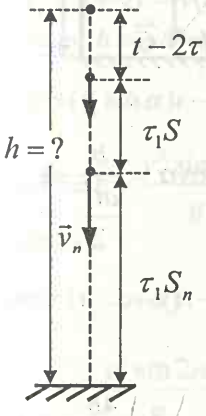
Pentru aflarea acceleraţiilor a_1 şi a_2, trebuie de rezolvat sistemul:

$$m_1 g - T = m_1 a_1, \quad 8T - m_2 g = -m_2 a_2 \text{ şi } a_1 = -8a_2$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

35. În ultimul interval de timp τ, de cădere liberă un corp parcurge o distanță de n ori mai mare decât în intervalul τ precedent. De la ce înălțime a căzut corpul? (Culegere Hristiev, pag.14 ed.1983)

Rezolvare:



Înainte de a afla pe h ne trebuie timpul t de cădere la sol. Pentru spațiu $S = v\tau + \frac{g\tau^2}{2}$ iar pentru $S_n = v_n\tau + \frac{g\tau^2}{2}$. Cum: $S_n = nS$,

$$v_n\tau + \frac{g\tau^2}{2} = (v\tau + \frac{g\tau^2}{2})n$$

$$2v_n\tau + g\tau^2 = 2v\tau n + g\tau^2 n \rightarrow$$

$$\rightarrow 2v_n + g\tau = 2vn + g\tau n \ , \ (1)$$

Dar $v = g(t-2\tau)$ și $v_n = v + g\tau$, încât:

$$v_n = g(t-2\tau) + g\tau = gt - 2g\tau + g\tau = gt - g\tau = g(t-\tau) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_n = g(t-\tau).$$

Pe $v_n = g(t-\tau)$ și $v = g(t-2\tau)$ le înlocuim în (1): și obținem:

$$\rightarrow 2g(t-\tau) + g\tau = 2g(t-2\tau)n + g\tau n \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(t-\tau) + \tau = 2(t-2\tau)n + \tau n \rightarrow$$

$$\rightarrow 2t - \tau = 2nt - 3n\tau \rightarrow \tau(3n-1) = 2t(n-1) \rightarrow t = \frac{\tau(3n-1)}{2(n-1)}.$$

Știindu-l pe t, putem afla pe h:

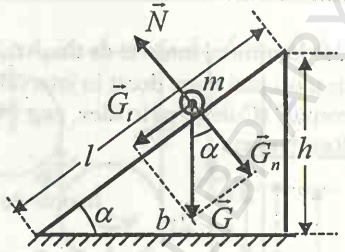
$$h = \frac{g}{2}t^2 = \frac{g}{2}\frac{\tau^2(3n-1)^2}{2(n-1)^2} = \frac{g}{2}\frac{\tau^2(3n-1)^2}{4(n-1)^2} = \frac{g}{8}\left(\frac{3n-1}{n-1}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{g}{8}\left(\frac{3n-1}{n-1}\right)^2.$$

36. Unui constructor i s-a cerut să proiecteze unghiul de înclinare al acoperișului unei case, astfel încât ploaia să se scurgă cât mai repede (neglijând frecările). Care trebuie să fie acest unghi? (Culegere Hristiev, pag.16 ed. 1983).

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:



Schema unui acoperiş:

$l \rightarrow$ lungimea drumului parcurs de o picătură în mişcare accelerată

$b \rightarrow$ baza acoperişului

$h \rightarrow$ înălţimea acoperişului

Din schemă se vede că : $\cos\alpha = \frac{b}{l}$ unde $l = \frac{at^2}{2}$ încât: $\cos\alpha = \frac{b}{\frac{at^2}{2}} \rightarrow$

$\frac{at^2}{2}\cos\alpha = b \rightarrow at^2\cos\alpha = 2b \rightarrow t^2 = \frac{2b}{a\cos\alpha}$ (1). Cum

$G_t = ma \rightarrow mg\sin\alpha = ma \rightarrow g\sin\alpha = a$.

Înlocuim pe $a = g\sin\alpha$ în (1) şi obţinem : $t^2 = \frac{2b}{g\frac{\sin 2\alpha}{2}} = \frac{4b}{g\sin 2\alpha} \rightarrow$

$\rightarrow t = 2\sqrt{\frac{b}{g\sin 2\alpha}}$.

Pentru ca ploaia să se scurgă cât mai repede, trebuie ca t să fie minim şi aceasta se întâmplă când $\sin 2\alpha = 1$ sau $\sin 2\alpha = \sin 90^o \rightarrow 2\alpha = 90^o \rightarrow$

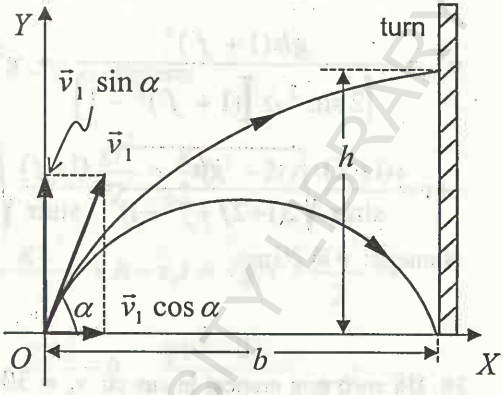
$\alpha = 45^o$

Se poate calcula şi timpul minim: $t_{min} = 2\sqrt{\frac{b}{g}}$.

Constructorul trebuie să facă acoperişul la un unghi $\alpha = 45^o$, iar baza b să fie cât mai mică.

37. O bilă, aruncată cu viteza v, sub unghiul $\alpha = 30^o$, cade la baza unui turn. Mărind viteza cu $f = 0{,}05 = 5\%$, bila loveşte turnul la înălţimea $h = 2m$. Care a fost viteza v?. (Culegere Hristiev, pag.18 ed. 1983)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Rezolvare:

b=bătaie teoretică

Calculăm pe:

$v_1 = v + fv = v(1+f)$

Pentru h avem relația:

$h = (v_1 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}$, iar

pentru $b = \dfrac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Bătaia

$b = (v_1 \cos\alpha)t \rightarrow t = \dfrac{b}{v_1 \cos\alpha} \rightarrow$

$$\rightarrow t = \frac{\dfrac{v^2 \sin 2\alpha}{g}}{v_1 \cos\alpha} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g v_1 \cos\alpha} = \frac{v^2 2\sin\alpha\cos\alpha}{g v_1 \cos\alpha} = \frac{2v^2 \sin\alpha}{g v_1}.$$

Dar $v_1 = v(1+f)$, încât: $t = \dfrac{2v^2 \sin\alpha}{gv(1+f)} = \dfrac{2v\sin\alpha}{g(1+f)} \rightarrow t = \dfrac{2v\sin\alpha}{g(1+f)}$.

Scriem relația lui $h = (v_1 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}$, înlocuind pe $v_1 = v(1+f)$ și

$t = \dfrac{2v\sin\alpha}{g(1+f)}$, încât obținem:

$$h = v(1+f)(\sin\alpha)\frac{2v\sin\alpha}{g(1+f)} - \frac{g}{2}\frac{4v^2\sin^2\alpha}{g^2(1+f)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{2v^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{2v^2\sin^2\alpha}{g(1+f)^2} \rightarrow gh = \left(2v^2\sin^2\alpha\right)\left[1 - \frac{1}{(1+f)^2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \left(2v^2\sin^2\alpha\right)\left[\frac{(1+f)^2 - g}{g(1+f)^2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow gh(1+f)^2 = \left(2v^2\sin^2\alpha\right)\left[(1+f)^2 - g\right] \rightarrow$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

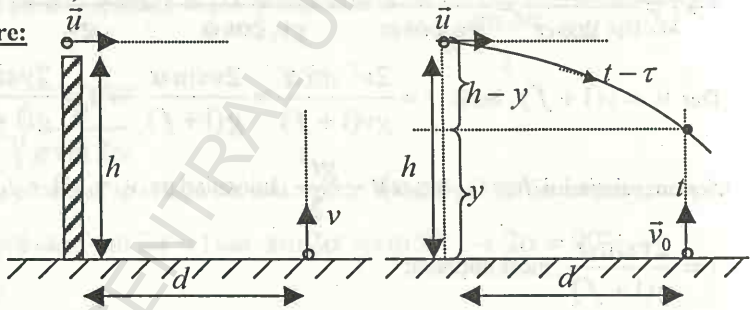
$$v^2 = \frac{gh(1+f)^2}{\left[2\sin^2\alpha\right]\left[(1+f)^2-1\right]} \rightarrow v^2 = \frac{gh(1+f)^2}{\left[(1+f)^2-1\right]2\sin^2\alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \frac{(1+f)}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{gh}{2(1+2f+f^2-1)}} = \frac{(1+f)}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{gh}{2f(f+2)}}.$$

Numeric: $v = 20$ m/s.

38. Un corp este aruncat în sus cu $v_0 = 30$ m/s. După un timp τ, la distanța $d = 20$ m, dintr-un turn de înălțime $h = 40$ m se aruncă orizontal spre primul corp, un al doilea corp cu viteza $u = 20$ m/s. Cât trebuie să fie intervalul de timp τ încât cele două corpuri să se întâlnească în aer? (Culegere Hristiev, pag.18 ed. 1983)

Rezolvare:



Pentru corpul aruncat de pe turn: $d = u(t-\tau)$ iar pentru corpul aruncat de la sol: $y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$; Pe verticală, corpul aruncat de pe turn are ecuația de mișcare: $h - y = \frac{g(t-\tau)^2}{2}$. Avem sistemul:

$$\begin{cases} d = u(t-\tau) \\ y = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2} \\ h - y = \dfrac{g(t-\tau)^2}{2} \end{cases}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Introducem pe $y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ în $h - y$ şi obţinem:

$$h - v_0 t + \frac{gt^2}{2} = \frac{g(t-\tau)^2}{2} \rightarrow h - v_0 t + \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}(t^2 - 2t\tau + \tau^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow h - v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2} - gt\tau + \frac{g\tau^2}{2} \rightarrow h - v_0 t = -gt\tau + \frac{g\tau^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow t(g\tau - v_0) = \frac{g\tau^2}{2} - h \rightarrow t = \frac{\frac{g\tau^2}{2} - h}{g\tau - v_0} = \frac{\frac{g\tau^2 - 2h}{2}}{g\tau - v_0} = \frac{g\tau^2 - 2h}{2(g\tau - v_0)}$$

Din $d = u(t - \tau)$ avem: $\frac{d}{u} = t - \tau \rightarrow \frac{d}{u} = \frac{g\tau^2 - 2h}{2(g\tau - v_0)} - \tau \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{d}{u} = \frac{g\tau^2 - 2h - 2\tau(g\tau - v_0)}{2(g\tau - v_0)} = \frac{g\tau^2 - 2h - 2g\tau^2 + 2\tau v_0)}{2(g\tau - v_0)} =$$

$$= \frac{2v_0\tau - 2h - g\tau^2)}{2(g\tau - v_0)} \rightarrow 2d(g\tau - v_0) = u(2v_0\tau - 2h - g\tau^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2dg\tau - 2dv_0 = 2v_0 u\tau - 2hu - gu\tau^2$$

$$gu\tau^2 + 2dg\tau - 2v_0 d - 2v_0 u\tau + 2hu = 0$$

$gu\tau^2 - 2(v_0 u - gd)\tau - 2(v_0 d - hu) = 0 \rightarrow$ ec. gr. II în τ :

$$\tau = \frac{v_0 u - gd \pm \sqrt{(v_0 u - gd)^2 + 2(v_0 d - hu)gu}}{gu} =$$

$$= \frac{v_0}{g} - \frac{d}{u} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 u^2 - 2v_0 ugd + g^2 d^2 + 2guv_0 d - 2gu^2 h}}{g^2 u^2} =$$

$$= \frac{v_0}{g} - \frac{d}{u} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 u^2}{g^2 u^2} + \frac{g^2 d^2}{g^2 u^2} - \frac{2gu^2 h}{g^2 u^2}} = \frac{v_0}{g} - \frac{d}{u} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{d^2}{u^2} - \frac{2h}{g}} \rightarrow$$

BCU ASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow \tau = \frac{v_0}{g} - \frac{d}{u} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{d^2}{u^2} - \frac{2h}{g}}$$

Numeric:

$$\tau = \frac{30}{10} - \frac{20}{20} \pm \sqrt{\frac{30^2}{10^2} + \frac{20^2}{20^2} - \frac{2 \bullet 40}{10}} = 3 - 1 \pm \sqrt{\frac{900}{100} + 1 - 8} =$$

$$= 2 \pm \sqrt{2}$$

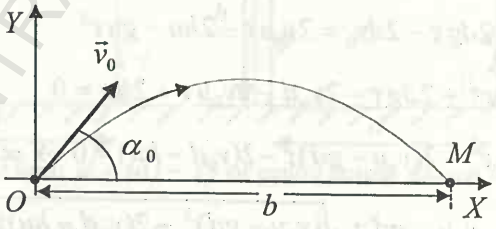
$$\tau \rightarrow \tau_1 = 2 + \sqrt{2} = 2 + 1{,}4 = 3{,}4s$$

$$\tau \rightarrow \tau_2 = 2 - \sqrt{2} = 2 - 1{,}4 = 0{,}6s$$

39. Un corp este aruncat, o dată sub unghiul $\alpha_0 = 45^o$ şi a doua oară orizontal , cu aceiaşi viteză , pe o suprafaţă orizontală cu coeficientul de frecare $\mu = 0{,}25$. De câte ori este mai mare distanţa în ultimul caz faţă de primul . (Culegere Hriestiev, pag 21. Ed. 1983)

Rezolvare:

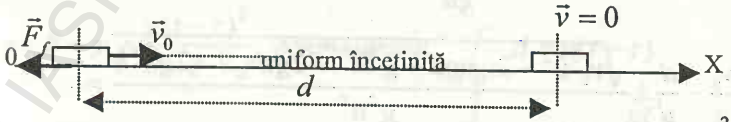
- aruncarea oblică:



Formula bătăii teoretice:

$$b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}$$

- aruncarea pe orizontală:



Din formula Galileo-Galilei: $0 = v_0^2 + 2ad \rightarrow -v_0^2 = 2ad \rightarrow d = \frac{-v_0^2}{2a}$

Dar $-F_f = ma \rightarrow -\mu mg = ma \rightarrow -\mu g = a$. Valoarea $a = -\mu g$,

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

o introducem în $d = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu g} \rightarrow d = \frac{v_0^2}{2\mu g}$

Facem raportul : $\frac{d}{b} = \frac{\frac{v_0^2}{2\mu g}}{\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}} = \frac{v_0^2}{2\mu g} \frac{g}{v_0^2 \sin 2\alpha_0} = \frac{1}{2\mu \sin 2\alpha_0} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{d}{b} = n = \frac{1}{2\mu \sin 2\alpha_0} \rightarrow n = \frac{1}{2\mu \sin 2\alpha_0}$

Numeric: $n = \frac{1}{2 \bullet 0{,}25 \sin 90^0} = \frac{1}{0{,}50 \bullet 1} = \frac{1}{0{,}50} = \frac{10}{5} = 2$

$n = 2$ adică $d = 2b$.

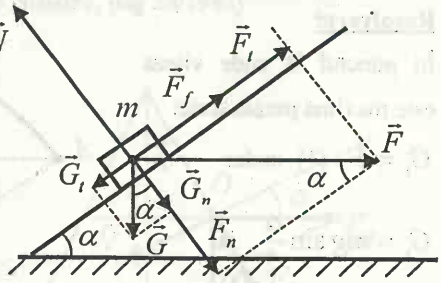
40. Cu ce forță minimă orizontală trebuie să acționăm asupra unui corp de masă m=1kg așezat pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30^o$ încât corpul să rămână în repaus? Unghiul de frecare $\varphi = 11^0 20'$. (Culegere Hristiev, pag.24 ed. 1983).

Rezolvare:

$\vec{F}$ trebuie să fie minimă

Pentru ca corpul să rămână în repaus trebuie ca

$G_t = F_t + F_f \rightarrow$



$\rightarrow mg\sin\alpha = F\cos\alpha + \mu N$ (1), unde $N = G_n + F_2 = mg\cos\alpha + F\sin\alpha$.

Înlocuind pe N în relația (1) obținem : $mg\sin\alpha = F\cos\alpha + \mu F\sin\alpha +$

$+ \mu mg\cos\alpha \rightarrow mg\sin\alpha = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) + \mu mg\cos\alpha \rightarrow$

$\rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) \rightarrow$

$\rightarrow mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) \rightarrow$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow F = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \frac{mg(\cos\alpha)(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \mu\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha})}{(\cos\alpha)(1+\mu\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})} =$$

$F = \frac{mg(tg\alpha - \mu)}{1 + \mu tg\alpha}$ cu $\mu = tg\varphi$ obținem:

$$F = mg\frac{(tg\alpha - tg\varphi)}{1 + tg\varphi tg\alpha} = mgtg(\alpha - \varphi) \rightarrow F = mgtg(\alpha - \varphi)$$

Pentru $\alpha = 30^o$ și $\varphi = 11^o20'$, $m = 1kg$ și $g \cong 10\,\text{m/s}^2$, se găsește că

$F_{\min} = 3{,}3N$

41. Cu ce viteză constantă maximă se poate mișca un camion pe un pod convex de rază $R = 200$ m și de lungime l=100m, coeficientul de frecare între anvelope și șosea fiind $\mu = 0{,}3$?

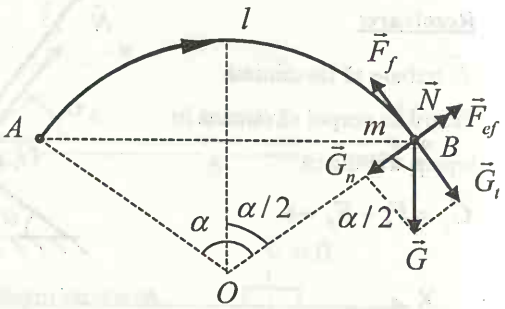
Rezolvare:

În punctul B unde viteza este maximă putem scrie:

$G_t = F_f$ (1) unde:

$G_t = mg\sin\frac{\alpha}{2}$, iar

$F_f = \mu N$. Forța de



apărare normală $N = G_n - F_{cf} = mg\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{mv_m^2}{R}$.

$$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{mv_m^2}{R}) = \mu m(g\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{v_m^2}{R})$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Înlocuind pe G_t şi F_f în (1) obţinem:

$$mg\sin\frac{\alpha}{2}=\mu m(g\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{v_m^2}{R})\rightarrow g\sin\frac{\alpha}{2}=\mu(g\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{v_m^2}{R})\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{g}{\mu}\sin\frac{\alpha}{2}=g\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{v_m^2}{R}\rightarrow\frac{v_m^2}{R}=g\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{g}{\mu}\sin\frac{\alpha}{2}\rightarrow$$

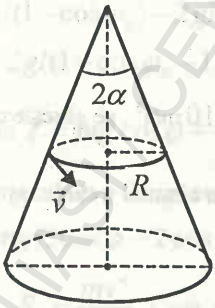
$$\rightarrow v_m^2=Rg(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\mu}\sin\frac{\alpha}{2}).\ \text{Cum}\ \frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{l}{2}}{R}=\frac{l}{2R}\rightarrow$$

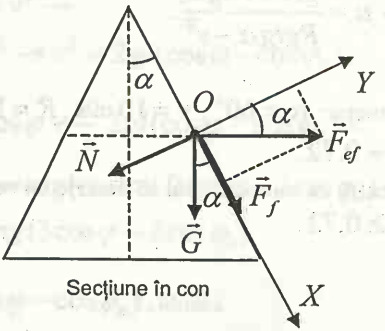
$$\rightarrow v_m=\sqrt{Rg(\cos\frac{l}{2R}-\frac{1}{\mu}\sin\frac{l}{2R})}.$$

Pentru : R=200m, l=100m, $\mu=0{,}3$ şi $g\cong 10\,\text{m/s}^2$ valoarea $v_m=16{,}8\,\text{m/s}$.

42. Care trebuie să fie coeficientul minim de frecare la alunecare între anvelope şi suprafaţa exterioară a unui con circular (cu vârful în sus) cu deschiderea $2\alpha=120^o$ pentru ca un motociclist să poată descrie un cerc orizontal de rază R=100m cu viteza 10m/s ? (Culegere Hristiev, pag 28/1983)

Rezolvare:





Relaţia vectorială a forţelor la echilibru: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_{cf}+\vec{F}_f=0$

Folosim metoda proiecţiei pe axele 0X şi 0Y a relaţiei vectoriale şi obţinem:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

0X: $0 + mg\cos\alpha + F_{cf}\sin\alpha + F_f = 0 \rightarrow$

$\rightarrow mg\cos\alpha + F_{cf}\sin\alpha + \mu N = 0 \quad (1)$

0Y: $-N - mg\sin\alpha + F_{cf}\cos\alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow N = -mg\sin\alpha + F_{cf}\cos\alpha$

Valoarea: $N = -mg\sin\alpha + F_{cf}\cos\alpha$ o înlocuim în (1) şi avem:

$$\rightarrow mg\cos\alpha + F_{cf}\sin\alpha + \mu(-mg\sin\alpha + F_{cf}\cos\alpha) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{R}\sin\alpha - \mu mg\sin\alpha + \mu\frac{mv^2}{R}\cos\alpha = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow gR\cos\alpha + v^2\sin\alpha - \mu Rg\sin\alpha + \mu v^2\cos\alpha = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow gR\cos\alpha + v^2\sin\alpha = -\mu(v^2\cos\alpha - Rg\sin\alpha)$$

$$\rightarrow gR\cos\alpha + v^2\sin\alpha = \mu(Rg\sin\alpha - v^2\cos\alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu = \frac{gR\cos\alpha + v^2\sin\alpha}{Rg\sin\alpha - v^2\cos\alpha} = \frac{(\cos\alpha)(gR + v^2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})}{(\cos\alpha)(Rg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - v^2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu = \frac{gR + v^2 tg\alpha}{Rgtg\alpha - v^2}.$$

Numeric: $\alpha = 60^o$, $v = 10$ m/s, $R = 100$ m şi $g \cong 10$ m/s^2, se găseşte că $\mu = 0{,}72$.

Pentru ca motociclistul să descrie un cerc pe suprafaţa conului trebuie ca $\mu \geq 0{,}72$.

43. De un fir inextensibil de lungime l este atârnată o bilă de masă m deviată cu unghiul φ_0 de la verticală şi apoi este lăsat liber.

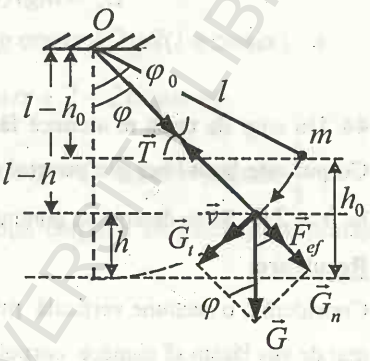
Se cer:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a) Să se determine tensiunea în fir în funcţie de unghiul φ dintre verticală şi poziţia firului.
b) Să se calculeze energia cinetică a bilei în funcţie de unghiul φ.

Rezolvare:

a) Din figură se vede că:



$$T = G_n + F_{cf} = mg\cos\varphi + \frac{mv^2}{l}$$

$$mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + mgh \quad (1)$$

$$\cos\varphi_0 = \frac{l-h_0}{l} \rightarrow$$

$$\rightarrow l\cos\varphi_0 = l - h_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow h_0 = l(1-\cos\varphi_0).$$

În mod analog se calculează: $h = l(1-\cos\varphi)$.

Se introduc h_0 şi h în relaţia (1) şi avem:

$$gl(1-\cos\varphi_0) = \frac{v^2}{2} + gl(1-\cos\varphi) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2gl(1-\cos\varphi_0) = v^2 + 2gl(1-\cos\varphi) \rightarrow$$

$$2gl(1-\cos\varphi_0) - 2gl(1-\cos\varphi) = v^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2gl(1-\cos\varphi_0 - 1 + \cos\varphi) = v^2 \rightarrow v^2 = 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Cum $T = mg\cos\varphi + \frac{mv^2}{l} = mg\cos\varphi + \frac{m}{l}2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0) =$

$= mg\cos\varphi + 2mg(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = mg(\cos\varphi + 2\cos\varphi - 2\cos\varphi_0) =$

$= mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0) \rightarrow T = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$

b) $E_c = \frac{mv^2}{2}$. Cum $v^2 = 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$, atunci

$$E_c = \frac{m}{2}2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \rightarrow$$

BCU IAŞI - CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

$\rightarrow E_c = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$

Răspunsurile sunt: $\begin{cases} T = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0) \text{ și} \\ E_c = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \end{cases}$

44. Un corp de masă m alunecă fără frecare pe suprafața unei sfere de rază r. Corpul este lăsat liber din punctul cel mai înalt de pe suprafața sferei adică de la $h = 2R$. Să se determine punctul unde se desprinde corpul de pe sferă.

Rezolvare:

Considerăm o secțiune verticală prin sfera de formă circulară și din punctul cel mai de sus lăsăm să alunece corpul fără frecare.

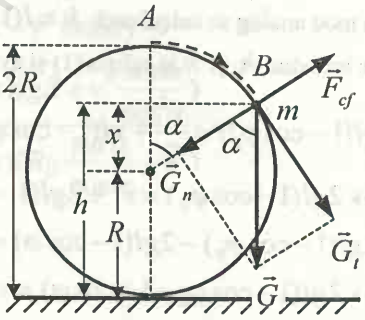
Notăm cu B→ punctul de desprindere a corpului de pe suprafața sferei.

Condiția de desprindere a corpului:

$F_{cf} = G_n \rightarrow$

$\rightarrow \frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha \rightarrow$

$\rightarrow v^2 = Rg\cos\alpha$.



În A corpul are numai energie potențială: $mg2R$.

În B corpul are și energie cinetică $\frac{mv^2}{2}$ și energie potențială mgh. Aplicăm legea conservării energiei mecanice din A în B și obținem :

$mg2R = \frac{mv^2}{R} + mgh \rightarrow 2gR = \frac{v^2}{R} + gh$ (1) unde $h = x + R$ (din figură) iar $x = R\cos\alpha$, încât $h = R\cos\alpha + R = R(1 + \cos\alpha)$. Relația

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$h = R(1+\cos\alpha)$ o introducem în relaţia (1) şi obţinem:

$$2gR = \frac{v^2}{2} + gR(1+\cos\alpha) \rightarrow 4gR = v^2 + 2gR(1+\cos\alpha).$$

Dar $v^2 = Rg\cos\alpha$ şi atunci: $4gR = Rg\cos\alpha + 2gR(1+\cos\alpha) \rightarrow$

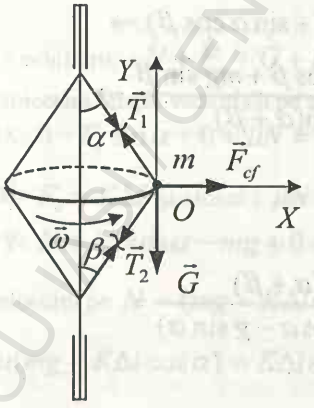
$$\rightarrow 4 = \cos\alpha + 2(1+\cos\alpha) \rightarrow 4 = \cos\alpha + 2 + 2\cos\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow 4-2 = 3\cos\alpha \rightarrow 2 = 3\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3} \text{ sau } \alpha = \arccos\frac{2}{3}$$

Cunoscându-se α putem determina poziţia corpului ce părăseşte suprafaţa sferei.

45. O tijă verticală de lungime l, are prinse la capete două fire de acelaşi fel sub unghiurile α, respectiv β, astfel încât la capătul comun este prinsă o bilă de masă m. Sistemul se pune în mişcare cu viteze unghiulare din ce în ce mai mari ajungând la viteza unghiulară ω. Se cer : tensiunile mecanice în fire şi care din fire se vor rupe mai întâi.

Rezolvare:



La viteza unghiulară ω şi la unghiurile α şi β, sistemul se reprezintă astfel:

La echilibrul forţelor :

$$\vec{T}_1 + \vec{F}_{cf} + \vec{G} + \vec{T}_2 = 0$$

Proiectăm relaţia vectorială pe 0X şi 0Y:

0X: $-T_1\sin\alpha + F_{cf} - T_2\sin\beta + 0 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow F_{cf} - T_2\sin\beta = T_1\sin\alpha$$

0Y: $T_1\cos\alpha - T_2\sin\beta - G = 0 \rightarrow$

BCU "LUCIAN BLAGA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\rightarrow T_1 \cos\alpha = G + T_2 \cos\beta$

Avem sistemul : $\begin{cases} F_{cf} - T_2 \sin\beta = T_1 \sin\alpha \\ G + T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha \end{cases}$ Necunoscute T_1 și T_2 .

Se împart ecuațiile:

$$\frac{F_{cf} - T_2 \sin\beta}{mg + T_2 \cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow$$

$$F_{cf} \cos\alpha - T_2 \cos\alpha \sin\beta = mg \sin\alpha + T_2 \sin\alpha \sin\beta \rightarrow$$

$$\rightarrow F_{cf} \cos\alpha - mg \sin\alpha = T_2(\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta) \rightarrow$$

$$T_2 = \frac{F_{cf} \cos\alpha - mg \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{m\omega^2 R \cos\alpha - mg \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \rightarrow$$

$$T_2 = \frac{m\omega^2 R \cos\alpha - mg \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{m(\omega^2 R \cos\alpha - g \sin\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Tot din sistemul de mai sus: $\begin{cases} F_{cf} - T_1 \sin\alpha = T_2 \sin\beta \\ -G + T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta \end{cases}$

Prin împărțirea ecuațiilor obținem:

$$\frac{F_{cf} - T_1 \sin\alpha}{-mg + T_1 \cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \rightarrow$$

$$F_{cf} \cos\beta - T_1 \sin\alpha \cos\beta = T_1 \cos\alpha \sin\beta - mg \sin\beta \rightarrow$$

$$\rightarrow F_{cf} \cos\beta + mg \sin\beta = T_1(\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta) \rightarrow$$

$$\rightarrow T_1 = \frac{F_{cf} \cos\beta + mg \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{m\omega^2 R \cos\beta + mg \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \rightarrow$$

$$T_1 = \frac{m(\omega^2 R \cos\beta + g \sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Facem raportul :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m(\omega^2 R \cos\beta + g \sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \frac{\sin(\alpha+\beta)}{m(\omega^2 R \cos\alpha - g \sin\alpha)} =$$

$$= \frac{\omega^2 R \cos\beta + g \sin\beta}{\omega^2 R \cos\alpha - g \sin\alpha} \rightarrow$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$T_1 = T_2 \frac{m\omega^2 R\cos\beta + mg\sin\beta}{m\omega^2 R\cos\alpha - mg\sin\alpha} = T_2 \frac{\omega^2 R\cos\beta + g\sin\beta}{\omega^2 R\cos\alpha - g\sin\alpha}$$

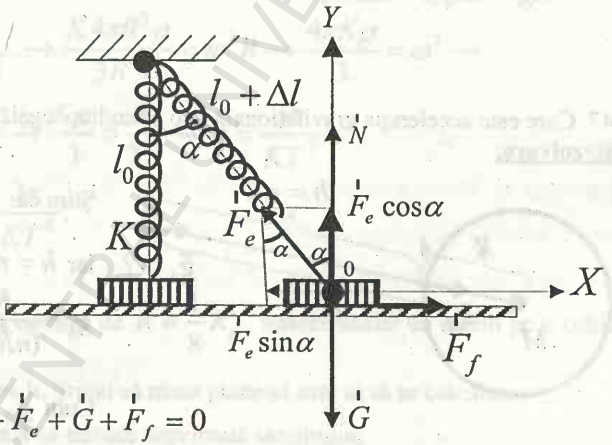
Cum $\omega^2 R\cos\beta + g\sin\beta > \omega^2 R\cos\alpha - g\sin\alpha \rightarrow T_1 > T_2$,

Încât firul de sus se rupe mai repede decât cel de jos.

46. Un corp de masă m este aşezat pe o scândură şi în acelaşi timp suspendat printr-un resort vertical nedeformat de lungime l_0 şi constanta elastică K. Scândura este trasă orizontal uniform, iar resortul deviază cu unghiul α faţă de verticală. Care este coeficientul de frecare dintre corp şi scândură?

(Culegere Hristiev, pag.31 ed. 1996)

Rezolvare:



La echilibru: $\vec{N} + \vec{F}_e + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$

Proiectăm relaţia vectorială pe axele 0X şi 0Y:

0X: $0 - F_e \sin\alpha + 0 + \mu N = 0 \rightarrow \mu N = F_e \sin\alpha$ (1)

Dar $F_e = K\Delta l$ şi atunci : $\mu N = K\Delta l \sin\alpha$

0Y: $N + F_e \cos\alpha - mg + 0 = 0 \rightarrow N = mg - K\Delta l \cos\alpha$

Înlocuim pe $N = (mg - K\Delta l\cos\alpha)$ în (1) şi obţinem :

$$\mu(mg - K\Delta l\cos\alpha) = K\Delta l \sin\alpha \rightarrow \mu = \frac{K\Delta l \sin\alpha}{mg - K\Delta l\cos\alpha} \quad (2)$$

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Dar din figură: $\cos\alpha = \frac{l_0}{l_0 + \Delta l} \rightarrow l_0\cos\alpha + \Delta l\cos\alpha = l_0 \rightarrow$

$\Delta l\cos\alpha = l_0 - l_0\cos\alpha \rightarrow \Delta l\cos\alpha = l_0(1-\cos\alpha) \rightarrow$

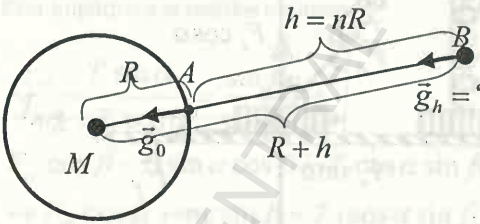
$\Delta l = \frac{l_0(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$. Înlocuim pe $\Delta l = \frac{l_0(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$ în (2) şi obţinem :

$$\mu = \frac{K\frac{l_0(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}\sin\alpha}{mg - K\frac{l_0(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}\cos\alpha} = \frac{Kl_0(\frac{1}{\cos\alpha} - 1)\sin\alpha}{mg - Kl_0(1-\cos\alpha)}$$

$$\mu = \frac{Kl_0(\frac{1}{\cos\alpha} - 1)\sin\alpha}{mg - Kl_0(1-\cos\alpha)}.$$

47. Care este acceleraţia gravitaţională la o altitudine egală cu n raze terestre?

Rezolvare:



Ştim că: $g_h = \frac{KM}{(R+h)^2}$ iar $h = nR$ şi atunci avem:

$g_h = \frac{KM}{(nR+R)^2} = \frac{KM}{R^2(n+1)^2}$.

Cum $g_0 = \frac{KM}{R^2}$ vom

obţine: $g_h = \frac{g_0}{(n+1)^2}$ unde $g_h \rightarrow$ acceleraţia gravitaţională la altitudinea h

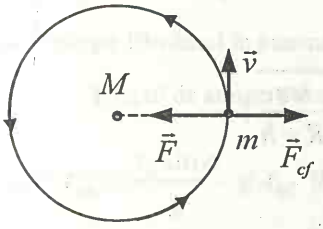
$g_0 \rightarrow$ acceleraţia gravitaţională la suprafaţa Pământului .

Din relaţia dintre g_h şi g_0 se constată că acceleraţia gravitaţională, scade cu creşterea altitudinii.

48. Care este densitatea unui asteroid dacă perioada de rotaţie este T, iar la ecuator n-are greutate. Se cunoaşte constanta gravitaţională K. (Culegere Hristiev, pag.33 ed. 1983).

BCU IAŞI CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

Rezolvare:



Condiția de echilibru: $F = F_{cf}$ unde:

$F = \frac{KmM}{R^2}$ iar $F_{cf} = m\omega^2 R$, încât

$\frac{KmM}{R^2} = m\omega^2 R \rightarrow \frac{KM}{R^2} = \omega^2 R\ (1) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{KM}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R$. Dar

$M = V\rho = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$ şi înlocuind valoarea lui M în relația (1) obținem:

$$\frac{K\frac{4\pi R^3}{3}\rho}{R^2} = \omega^2 R \rightarrow \frac{K4\pi R^3\rho}{3R^2} = \omega^2 R \rightarrow \frac{4\pi K\rho}{3} = \omega^2 \rightarrow$$

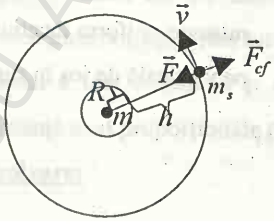
$$\rightarrow \frac{4\pi K\rho}{3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \rightarrow \frac{K\rho}{3} = \frac{\pi}{T^2} \rightarrow \rho = \frac{3\pi}{KT^2}$$

Răspuns: $\rightarrow \rho = \frac{3\pi}{KT^2}$.

49. De pe o planetă cu raza de $R = \frac{1}{8}R_p$, trebuie lansat un satelit pe o orbită circulară la înălțimea h. Știind că masa planetei este m să se calculeze:

a) viteza tangențială ce trebuie imprimată satelitului;
b) viteza unghiulară
c) perioada de rotație şi numărul de ture în t.
(Fizica clasa a IX-a pag 117).

Rezolvare:



a) $v = ?$

$F = F_{cf}$

$\frac{kmm_s}{(R+h)^2} = \frac{m_s v^2}{R+h} \rightarrow \frac{km}{(R+h)} = v^2$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$v = \sqrt{\dfrac{km}{(R+h)}}$ unde $R = \dfrac{1}{8}R_p$

b) $v = \omega(R+h) \rightarrow \omega = \dfrac{v}{R+h} = \dfrac{1}{R+h}\sqrt{\dfrac{km}{R+h}}$;

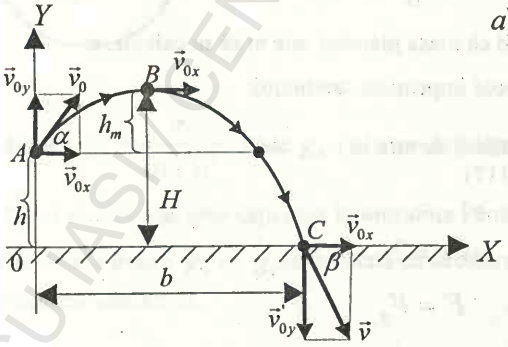
c) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\dfrac{1}{R+h}\sqrt{\dfrac{Km}{R+h}}} = \dfrac{2\pi(R+h)}{\sqrt{\dfrac{Km}{R+h}}}$

d) $n = \dfrac{t}{T} = \dfrac{t\sqrt{\dfrac{Km}{R+h}}}{2\pi(R+h)}$

50. Dintr-un deal de la altitudinea h se aruncă un obuz cu viteza inițială v_0 sub un unghi α față de orizontală. Să se afle:

a) timpul de atingere a solului;

b) înălțimea maximă față de baza dealului;



Rezolvare:

a) Componentele vitezei v_0:

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \rightarrow 0X$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha \rightarrow 0Y$

Mișcarea obuzului din A în B se compune dintr-o mișcare uniform încetinită pe verticală de jos în sus și o mișcare uniform rectilinie după 0X cu viteza v_{0x}.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În B, obuzul are o mişcare de aruncare pe orizontală de la h_m cu v_{0x}, după care loveşte Pământul în punctul C, cu viteza v.

Timpul de atingere a solului este: $t_{AB} + t_{BC}$, adică $t = t_{AB} + t_{BC}$,

unde $t_{AB} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ şi t_{BC} îl aflăm din relaţia $H = \frac{gt_{BC}^2}{2} \rightarrow t_{BC} = \sqrt{\frac{2H}{g}} =$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}(h_m + h)} = \sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + h\right)} = \sqrt{2\left(\frac{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}{2g^2}\right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow t_{BC} = \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}.$$ Timpul total va fi :

$$t = t_{AB} + t_{BC} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} =$$

$$= \frac{1}{g}(v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}) \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{1}{g}(v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh})$$

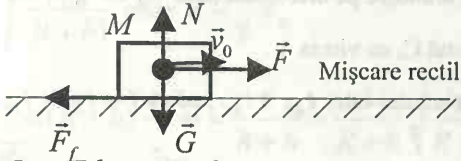
b) $H = h + h_m = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

51. De un tren de masă M care merge rectiliniu uniform se desprinde ultimul vagon de masă m. Ce distanţă parcurge acest vagon până la oprire, dacă puterea locomotivei a fost tot timpul P, iar după desprinderea vagonului, viteza trenului a fost constantă şi de valoare v. Se consideră că toate forţele de rezistenţă sunt proporţionale cu greutăţile. (Culegere Hristiev, pag 36 ed. 1983)

Rezolvare:

ROMANIA / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

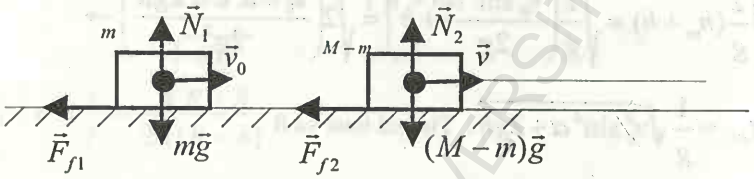
a) Înainte de desprinderea vagonului:



Mişcare rectilinie uniformă cu $v_0 = \text{const.}$

$$P = \frac{L}{t} = \frac{Fd}{t} \rightarrow \text{dar } \frac{d}{t} = v_0 \text{ iar } F_f = KMg \text{, încât: } P = KMgv_0$$

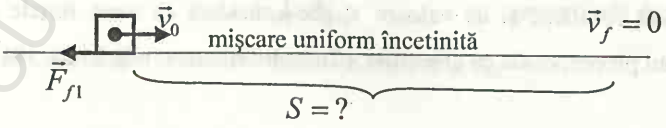
b) În timpul desprinderii vagonului:



După desprinderea vagonului, acesta va avea până la oprire o mişcare uniform încetinită faţă de restul trenului de masă M-m, care va avea o mişcare rectilinie uniformă, deoarece puterea P a locomotivei este constantă. Întrucât puterea este constantă şi restul de tren, se deplasează rectiliniu şi uniform, încât putem scrie: $P = \frac{F_{f2}d}{t} = F_{f2}v = K(M-m)gv \rightarrow P = K(M-m)gv$.

Cum $P = KMgv_0$ şi $P = K(M-m)gv$, atunci vom avea:

$KMgv_0 = K(M-m)gv \rightarrow v_0 = \frac{(M-m)gv}{M}$. Aceasta este viteza vagonului de masă m în momentul desprinderii de restul trenului. În continuare vagonul va avea o mişcare uniform încetinită până când se va opri parcurgând un spaţiu S.



BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru aflarea lui S ne folosim de relaţia Galileo-Galilei, punând condiţia ca viteza finală să fie nulă:

$$0 = v_0^2 + 2aS \rightarrow -v_0^2 = 2aS \rightarrow S = \frac{-v_0^2}{2a}.$$

Cum vagonului în mişcare îi lipseşte forţa motoare a locomotivei şi asupra sa acţionează numai forţa de frecare, putem scrie : $-F_{f1} = ma$ (legea II-a dinamicii). Cum $-F_{f1} = Kmg$, atunci $-Kmg = ma \rightarrow a = -kg$.

Înlocuind pe $a = -kg$ în $S = \frac{-v_0^2}{2a}$ obţinem $S = \frac{-v_0^2}{2(-kg)} = \frac{v_0^2}{2kg} \rightarrow$

$\rightarrow S = \frac{v_0^2}{2kg}$. Dar $v_0 = \frac{(M-m)gv}{M}$ şi atunci $S = \frac{1}{2kg}\frac{(M-m)^2 g v^2}{M^2}$.

Din: $P = K(M-m)gv \rightarrow K = \frac{P}{(M-m)gv}$, de unde :

$$S = \frac{(M-m)^2 g v^2}{2gM^2 \frac{P}{(M-m)gv}} = \frac{(M-m)^3 g v^3}{2M^2 P} \rightarrow S = \frac{(M-m)^3 g v^3}{2M^2 P}.$$

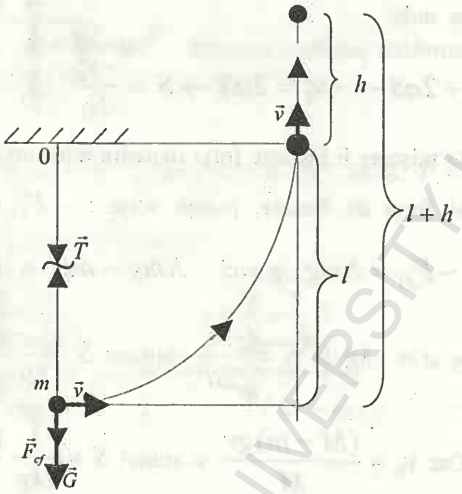
S este spaţiul parcurs de vagon de la desprindere până la oprire.

52. O bilă de masă m oscilează în planul vertical, fiind suspendată printr-un fir de lungime l. Când firul trece prin poziţie verticală tensiunea din fir este T. La un moment dat când bila este la acelaşi nivel cu punctul de suspensie firul se rupe. La ce înălţime se va ridica bila faţă de acest punct. (Culegere Hristiev pag. 39 ed. 1983)

Rezolvare:

BCU IAŞI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

bila se opreşte



Când pendulul trece cu viteza v_0 prin poziţia verticală (de echilibru) putem scrie: $T = F_{cf} + G = \frac{mv_0^2}{l} + mg \rightarrow T - mg = \frac{mv_0^2}{l} \rightarrow \frac{l(T-mg)}{m} = v_0^2$ (1).

Aplicăm legea conservării energiei mecanice : $\frac{mv_0^2}{2} = mg(l+h) \rightarrow$

$\rightarrow v_0^2 = 2g(l+h)$ (2).

Relaţia (2) o introducem în relaţia (1) şi obţinem: $\frac{l(T-mg)}{m} = 2g(l+h) \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{l(T-mg)}{m} = 2gl + 2gh \rightarrow \frac{l(T-mg)}{m} - 2gl = 2gh \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{l(T-mg)}{2mg} - l = h \rightarrow \frac{lT - lmg - 2mgl}{2mg} = h \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{lT - 3mgl}{2mg} = h \rightarrow \frac{l}{2}\left(\frac{T-3mg}{mg}\right) \rightarrow h = \frac{l}{2}\left(\frac{T}{mg} - 3\right) \rightarrow$$

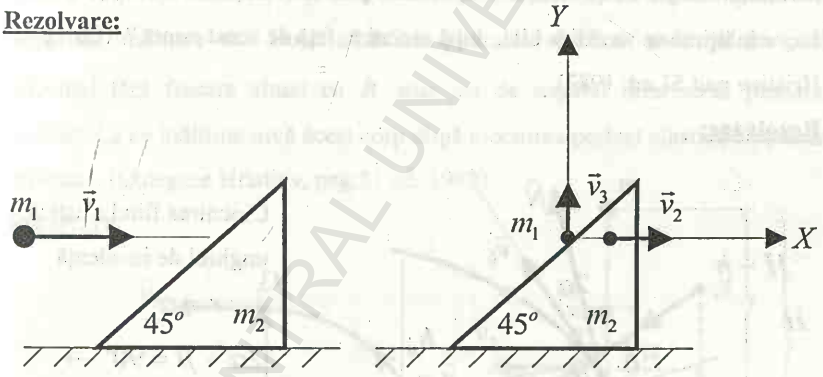
BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

→înălţimea de ridicare a bilei după ruperea firului.

53. Un corp de masă m_1 şi de viteză v_1 loveşte elastic pe direcţia orizontală o prismă echilaterală de masă m_2, aflată în repaus pe o suprafaţă netedă, orizontală şi fără frecare. După ciocnirea elastică corpul de masă m_1 se deplasează vertical în sus iar prisma după direcţia orizontală.

Să se afle vitezele v_3 şi v_2 a celor două corpuri. (Culegere Hristiev pag 51. Ed.1983)

Rezolvare:



Aplicăm legea conservării energiei cinetice:

$$\frac{m_1v_1^2}{2}=\frac{m_2v_2^2}{2}+\frac{m_1v_3^2}{2}\rightarrow m_1v_1^2=m_2v_2^2+m_1v_3^2.$$

Scriem legea conservării impulsului:

$$\vec{p}_1+0=\vec{p}_2+\vec{p}'_1.$$

Proiectăm relaţia vectorială după axa 0X:

$$m_1v_1=m_2v_2+0\rightarrow m_1v_1=m_2v_2.$$

Avem sistemul : $\begin{cases} m_1v_1^2=m_2v_2^2+m_1v_3^2 \\ m_1v_1=m_2v_2 \end{cases}$ Necunoscute v_3 şi v_2

BCU MIHAI EMINESCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

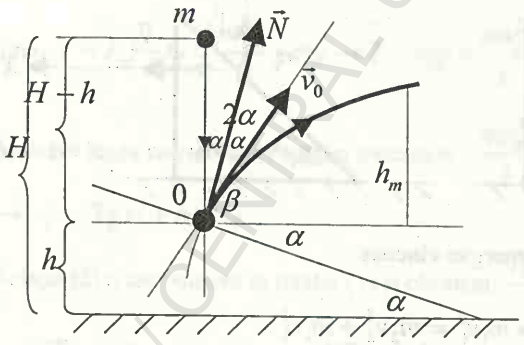
Din ecuaţia a doua $v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$ pe care o introducem în prima ecuaţie :

$$m_1 v_1^2 = m_2 \frac{m_1^2 v_1^2}{m_2^2} + m_1 v_3^2 \rightarrow m_1 v_1^2 = \frac{m_1^2 v_1^2}{m_2} + m_1 v_3^2 \rightarrow v_1^2 = \frac{m_1 v_1^2}{m_2} + v_3^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v_1^2 - \frac{m_1}{m_2} v_1^2 = v_3^2 \rightarrow v_1^2 (1 - \frac{m_1}{m_2}) = v_3^2 \rightarrow v_3 = v_1 \sqrt{1 - \frac{m_1}{m_2}} \text{ şi } v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 .$$

54. O bilă cade de la înălţimea H faţă de suprafaţa Pământului pe un plan înclinat de unghi α şi loveşte elastic acest plan într-un punct h aflat pe plan. La ce înălţime se va ridica bila, după ciocnire, faţă de acest punct ? (Culegere Hristiev pag.51 ed. 1983).

Rezolvare:



Ciocnirea fiind elastică, unghiul de incidenţă

$i = r = \alpha$

$2\alpha + \beta = 90^o \rightarrow$

$\beta = 90^o - 2\alpha$

După ciocnirea elastică, bila se va ridica faţă de punctul 0 la înălţimea h_m. În urma ciocnirii în punctul P, bila va avea o mişcare oblică cu viteza v_0 şi de un unghi β faţă de orizontală. De la aruncarea oblică, putem scrie formula de calcul a înălţimii maxime:

$h_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{2g}$. Însă $v_0^2 = 2g(H - h)$ şi atunci :

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$h_m = \frac{\sin^2\beta}{2g} 2g(H-h) = (H-h)\sin^2\beta \rightarrow h_m = (H-h)\sin^2\beta \text{ (1).}$$

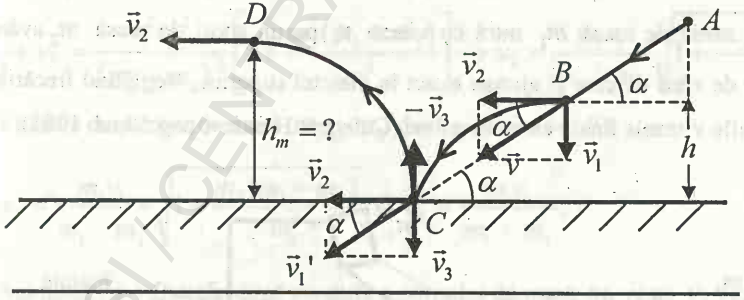
Calculăm $\sin\beta = \sin(90^o - 2\alpha) = \sin 90^o \cos 2\alpha - \cos 90^o \sin 2\alpha \rightarrow$

$\rightarrow \sin\beta = \cos 2\alpha$, încât relația (1) devine: $h_m = (H-h)\cos^2 2\alpha$.

Înălțimea maximă la care se ridică bila după ciocnirea ei cu planul înclinat va fi : $h_m = (H-h)\cos^2 2\alpha$.

55. Un corp mic alunecă liber fără frecare pe un plan înclinat de lungime l și unghi de înclinare α. După părăsirea planului înclinat cade pe un plan orizontal fără frecare situat cu h mai jos de capătul inferior al planului înclinat. La ce înălțime urcă acest corp după ciocnirea perfect elastică cu planul orizontal. (Culegere Hristiev, pag.51 ed. 1983)

Rezolvare:



Tipurile de mișcări pe traseul ABCD: AB→ mișcare uniform accelerată,

BC→ aruncare pe orizontală

CD→ aruncare oblică

Înălțimea maximă la care ajunge corpul după ciocnirea elastică cu planul

orizontal va fi : $h_m = \frac{v_3^2}{2g}$.

Pentru aflarea v_3 ne folosim de relaţia Galileo-Galilei: $v_3^2 = v_1^2 + 2gh.$

Dar $v_1 = v\sin\alpha$, încât $v_3^2 = v^2 \sin^2\alpha + 2gh.$

Cum $v^2 = 2g(\sin\alpha)l$, obţinem: $v_3^2 = 2g(\sin\alpha)l\sin^2\alpha + 2gh =$

$= 2g(l\sin^3\alpha + h). \rightarrow v_3^2 = 2g(l\sin^3\alpha + h).$

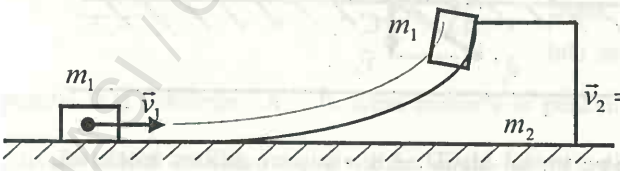
Însă $h_m = \frac{v_3^2}{2g} = \frac{1}{2g} 2g(l\sin^3\alpha + h) = l\sin^3\alpha + h \rightarrow$

$\rightarrow h_m = l\sin^3\alpha + h.$

Înălţimea maximă a corpului faţă de planul orizontal va fi : $h_m = l\sin^3\alpha + h$

Se vede din relaţie că $h_m > h$ şi depinde de h, l şi α.

56. O sanie de masă m_1 intră cu viteza v_1 pe un sport de masă m_2 având forma de sfert de cerc şi ajunge exact în punctul superior. Neglijând frecările, să se afle vitezele finale ale corpurilor. (Culegere Hristiev, pag.50 ed. 1983).



înainte de ciocnire

Rezolvare:

În timpul ciocnirii scriem legea conservării impulsului:

$m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2)v_4 \rightarrow v_4 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$, unde v_4 reprezintă viteza lui

m_2 după ciocnirea plastică cu m_1.

Aplicăm legea conservării energiei cinetice în timpul ciocnirii corpurilor:

$$\frac{m_1v_1^2}{2}=\frac{m_2v_4^2}{2}+\frac{m_1v_3^2}{2}\rightarrow m_1v_1^2=m_2v_4^2+m_1v_3^2$$ unde v_3 este viteza lui

m_1 după ciocnirea cu m_2.

Din relația : $m_1v_1^2=m_2v_4^2+m_1v_3^2\rightarrow m_1v_1^2-m_2v_4^2=m_1v_3^2$ (1).

Înlocuim pe $v_4=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}$ în relația (1) și obținem:

$$m_1v_1^2-m_2\frac{m_1^2v_1^2}{(m_1+m_2)^2}=m_1v_3^2\rightarrow v_1^2-\frac{m_1m_2v_1^2}{(m_1+m_2)^2}=v_3^2\rightarrow$$

$$\rightarrow v_1^2\left[1-\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\right]=v_3^2\rightarrow v_1^2\left[\frac{m_1^2+2m_1m_2+m_2^2-m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\right]=v_3^2\rightarrow$$

$$\rightarrow v_1^2\left[\frac{m_1^2+m_1m_2+m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\right]=v_3^2\rightarrow\frac{v_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left[m_1^2+m_2(m_1+m_2)\right]=v_3^2\rightarrow$$

$$\rightarrow v_3^2=\frac{v_1^2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left[1+\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1^2}\right]\rightarrow v_3=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}\sqrt{1+\frac{m_2(m_1+m_2}{m_1^2}}$$

Vitezele corpurilor de mase m_1 și m_2 după ciocnire vor fi :

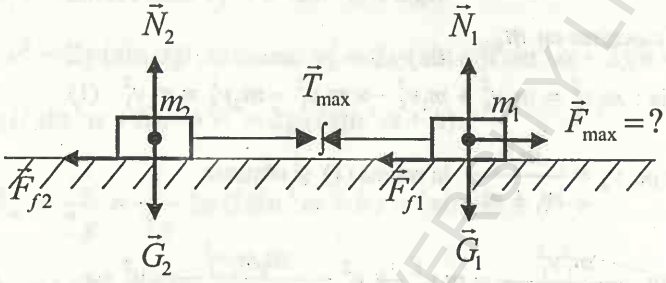
$$v_3=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}\sqrt{1+\frac{m_2(m_1+m_2)}{m_1^2}}\text{ și }v_4=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}.$$

Am notat cu v_3 viteza după ciocnire a corpului de masă m_1 și cu v_4 viteza după ciocnire a corpului de masă m_2.

57. Două corpuri de mase m_1 și m_2 sunt așezate pe plan orizontal și legate între ele printr-un fir care rezistă până la o tensiune maximă T_{max}. Coeficientul

de frecare la alunecare este acelaşi pentru ambele corpuri. Cu ce forţă orizontală maximă putem trage corpul m_1 pentru a nu se rupe firul în timpul mişcării? (Fizica clasa a IX-a , pag 237)

Rezolvare:



Aplicăm legea II-a a dinamicii corpului de masă m_1 :

$F_{max} - T_{max} - F_{f1} = m_1 a$, unde $F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$, încât:

$F_{max} - T_{max} - \mu m_1 g = m_1 a$ (1).

Pentru aflarea F_{max} avem nevoie de acceleraţia a a sistemului.

Aflarea lui : $a = \dfrac{F_{max} - F_{f1} - F_{f2}}{m_1 + m_2} = \dfrac{F_{max} - \mu m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2}$.

Înlocuim expresia lui $a = \dfrac{F_{max} - \mu m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2}$

în relaţia (1) şi obţinem: $F_{max} - T_{max} - \mu m_1 g = m_1 \dfrac{F_{max} - \mu m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2} \rightarrow$

$\rightarrow F_{max}(m_1 + m_2) - T_{max}(m_1 + m_2) - \mu m_1 g(m_1 + m_2) =$

$= m_1 F_{max} - \mu m_1^2 g + \mu m_1 m_2 g \rightarrow$

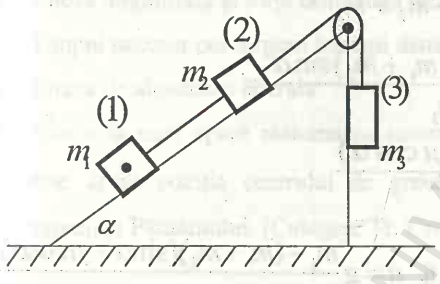
$\rightarrow F_{max} m_1 + F_{max} m_2 - m_1 T_{max} - m_2 T_{max} - \mu m_1^2 g_1 - \mu m_1 m_2 g =$

$= m_1 F_{max} - \mu m_1^2 g - \mu m_1 m_2 g \rightarrow \; m_2 F_{max} - (m_1 + m_2) T_{max} = 0$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau $F_{max} = \dfrac{(m_1 + m_2)T_{max}}{m_2}$.

58. Pe un plan înclinat se deplasează două greutăţi sub acţiunea unei a treia greutăţi conform figurii: Greutăţile sunt legate între ele prin cabluri, iar cablul ce leagă corpul (2) de corpul (3) trece peste un scripete fix. Coeficientul de frecare dintre corpurile (1) şi (2) cu planul înclinat este μ. Unghiul dintre planul înclinat şi orizontală este α iar masele celor trei corpuri sunt m_1, m_2 şi m_3. Se cere să se calculeze :



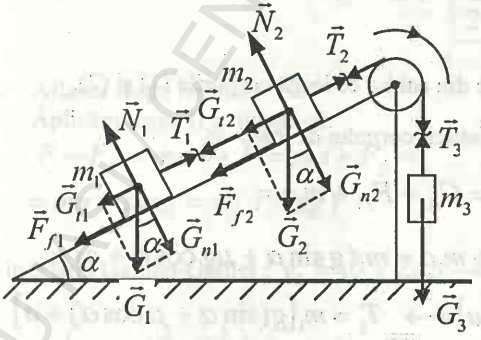
a) acceleraţia sistemului mecanic format de cele trei corpuri.

b) tensiunea din cablu ce leagă corpurile (2) şi (3)

c) tensiunea din cablu ce leagă corpurile (1) şi (2)

(Culegere Tr. Creţu, pag. 35 ed. 1974)

Rezolvare:



a) Aflăm acceleraţia sistemului mecanic dat. Întrucât sistemul se deplasează în sensul acţiunii forţei $\vec{G}_3$, putem scrie conform legii a II a a dinamicii :

$$G_3 - G_{t2} - F_{f2} - G_{t1} - F_{f1} = (m_1 + m_2 + m_3)a \rightarrow$$

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$a = \dfrac{G_3 - G_{t2} - F_{f2} - G_{t1} - F_{f1}}{m_1 + m_2 + m_3}$, unde $G_3 = m_3 g$, $F_{f2} = \mu m_2 g \cos\alpha$,

$F_{f1} = \mu m_1 g \cos\alpha$, $G_{t2} = m_2 g \sin\alpha$, $G_{t1} = m_1 g \sin\alpha$

Înlocuind pe: $G_3, G_{t2}, F_{f2}, G_{t1}$ și F_{f1}, cu expresiile lor obținem:

$$a = \frac{m_3 g - m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$= g \frac{m_3 - \mu(m_1 + m_2)\cos\alpha - (m_1 + m_2)\sin\alpha}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$= g \frac{m_3 - (m_1 + m_2)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Accelerația sistemului mecanic va fi: $a = g \dfrac{m_3 - (m_1 + m_2)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3}$.

b) Calcularea tensiunii mecanice din cablul ce leagă corpurile (2) și (3).

Aplicăm legea II a dinamicii corpului de masă m_3:

$G_3 - T = m_3 a \rightarrow G_3 - m_3 a = T \rightarrow m_3 g - m_3 a = T \rightarrow$

$\rightarrow m_3(g - a) = T \rightarrow T = m_3(g - a)$. Cunoscând pe a de la punctul (a) putem afla pe T.

c) Aflarea tensiunii mecanice din cablul ce leagă corpurile (1) și (2).

Din nou aplicăm legea II a dinamicii corpului de masă m_1:

$$T_1 - G_{t1} - F_{f1} = m_1 a \rightarrow T_1 = G_{t1} + F_{f1} + m_1 a =$$

$$= m_1 g \sin\alpha + \mu m_1 g \cos\alpha + m_1 a = m_1(g \sin\alpha + \mu g \cos\alpha + a) =$$

$$= m_1[g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + a] \rightarrow \quad T_1 = m_1[g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + a]$$

Cunoscând pe a de la punctul a) putem afla pe T_1.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

59. Un autoturism se deplasează rectiliniu cu viteza v_1 şi după ce parcurge distanţa l_1 are viteza v_2. După aceea intră într-o curbă, cu această viteză constantă străbătând un arc de cerc cu lungimea l_2 şi al cărui unghi la centru este 90°. Ştiind că autoturismul are masa m iar coeficientul de frecare pe întreg drumul este μ, să se afle:

a) Forţa motoare pe distanţa l_1

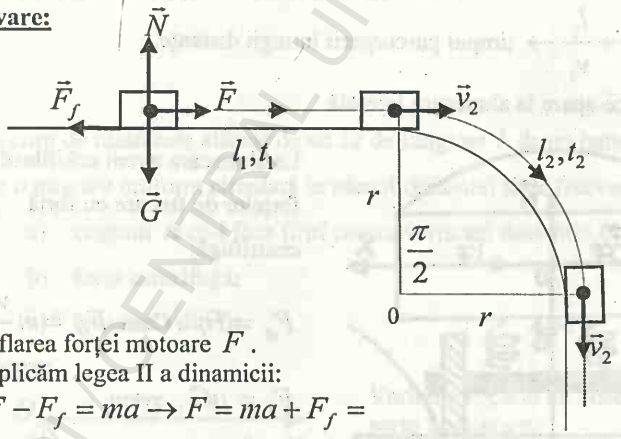
b) Viteza unghiulară şi forţa centrifugă dezvoltată la curbă

c) Timpul necesar parcurgerii întregii distanţe considerate.

d) Viteza de alunecare laterală

e) Viteza la care apare răsturnarea autoturismului dacă distanţa dintre roţi este d iar poziţia centrului de greutate este la înălţimea h faţă de suprafaţa Pământului. (Culegere Tr. Creţu , pag.41 ed.1974)

Rezolvare:



a) Aflarea forţei motoare F.
Aplicăm legea II a dinamicii:

$$F - F_f = ma \rightarrow F = ma + F_f =$$
$$= ma + \mu mg = m(a + \mu g)$$

Din relaţia Galileo-Galilei : $v_2^2 = v_1^2 + 2al_1 \rightarrow a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2al_1}$ şi atunci

$$F = m\left(\mu g + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2al_1}\right) \rightarrow$$ forţa motoare pe distanţa l_1

b) Calcularea vitezei unghiulare ω şi a forţei centrifuge F_{cf}.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ştim că $\omega = \frac{v}{r}$ unde în cazul nostru $v = v_2$, iar pe r îl aflăm din relaţia

$\frac{\pi}{2} = \frac{l_2}{r} \rightarrow r = \frac{2l_2}{\pi}$, încât $\omega = \frac{v_2\pi}{2l_2}$. Forţa centrifugă:

$$F_{cf} = m\omega^2 r = m\frac{v_2^2\pi^2}{4l_2^2}r = m\frac{v_2^2\pi^2}{4l_2^2}\frac{2l_2}{\pi} \rightarrow F_{cf} = m\frac{v_2^2\pi}{2l_2}.$$

La punctul b) cele două mărimi fizice sunt:

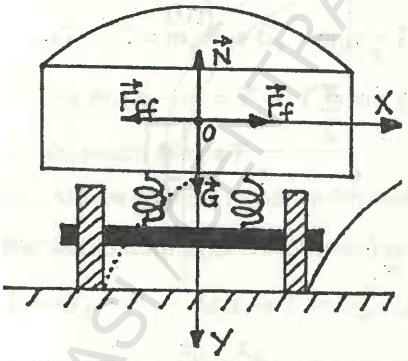
$$\omega = \frac{v_2\pi}{2l_2} \quad \text{şi} \quad F_{cf} = m\frac{v_2^2\pi}{2l_2}$$

c) Timpul total $t = t_1 + t_2$ unde t_1 îl aflăm din relaţia:

$$l_1 = v_m t_1 \rightarrow t_1 = \frac{l_1}{v_m} = \frac{l_1}{\frac{v_1 + v_2}{2}} = \frac{2l_1}{v_1 + v_2} \text{ şi } t_2 = \frac{l_2}{v_2}, \text{ încât}$$

$t = \frac{2l_1}{v_1 + v_2} + \frac{l_2}{v_2} \rightarrow$ timpul parcurgerii întregii distanţe.

d) Viteza ce apare la alunecare laterală



La alunecare avem echilibrul forţelor de frecare cu forţă centrifugă:

$F_{cf} = F_f$. Cum $F_{cf} = m\frac{v_a^2}{r}$ şi

$F_f = \mu G$, avem

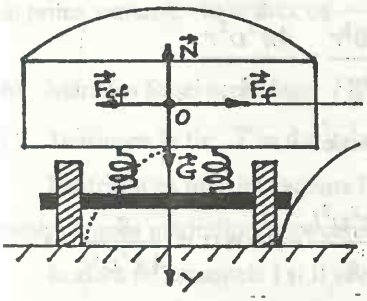
$$m\frac{v_a^2}{r} = \mu mg \rightarrow v_a^2 = \mu gr \rightarrow$$

$\rightarrow v_a = \sqrt{\mu gr}$. Dar $r = \frac{2l_2}{\pi}$, atunci $\rightarrow v_a = \sqrt{\mu g\frac{2l_2}{\pi}}$.

Viteza la alunecare va fi : $v_a = \sqrt{\mu g\frac{2l_2}{\pi}}$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

e) Viteza ce apare la răsturnarea autoturismului:



La echilibru de rotație: $M_{Fcf} = M_G$ (1)

Cum $M_{Fcf} = F_{cf} h$ și $M_G = G\frac{d}{2}$,

atunci relația (1) devine: $F_{cf} h = G\frac{d}{2}$.

Dar $F_{cf} = \frac{mv_r^2}{r}$ și $G = mg$, încât:

$$\frac{mv_r^2}{r} h = mg\frac{d}{2} \rightarrow v_r^2 h = gr\frac{d}{2} \rightarrow v_r = \sqrt{\frac{grd}{2h}},$$

Viteza la răsturnarea autoturismului va fi: $v_r = \sqrt{\frac{grd}{2h}}$.

Din relație se vede că v_r deinde de r, d *și* h.

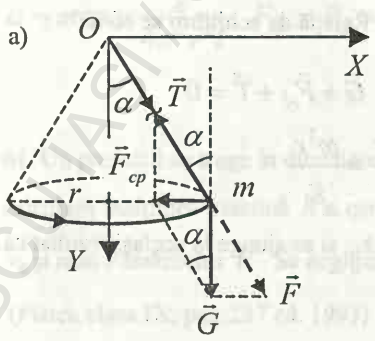
60. Un corp de masă este atârnat de un fir de lungime l de un punct fix 0 și descrie o mișcare uniform circulară în planul orizontal și de frecvență υ. Se cer: a) unghiul α ce-l face firul ca axa verticală dusă prin 0;

b) forța centrifugă;

c) tensiunea din fir.

Rezolvare:

a)



Varianta I. Când un observator nu ia parte la mișcare.

În această situație, forța centripetă $\vec{F}_{cp}$ acționează pe direcția razei cercului și având sensul opus ei. Relația de echilibru se scrie:

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\vec{G}+\vec{F}_{cp}+\vec{T}=0$.

a) Din figură se vede: $tg\alpha=\dfrac{F_{cp}}{G}=\dfrac{m\omega^2 r}{mg}=\dfrac{4\pi^2\upsilon^2 r}{g}$

Cum $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ şi $r=l\sin\alpha$ vom scrie:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4\pi^2\upsilon^2}{g}l\sin\alpha\rightarrow\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{4\pi^2\upsilon^2 l}{g}\rightarrow\cos\alpha=\frac{g}{4\pi^2\upsilon^2 l}\rightarrow$$

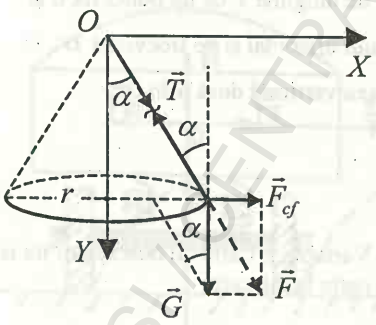
$$\rightarrow\alpha=\arccos\frac{g}{4\pi^2\upsilon^2 l}.$$

b) Mărimea forţei centrifuge: $F_{cp}=m\omega^2 r=m4\pi^2\upsilon^2 l\sin\alpha$

c) Tensiunea în fir: $T=F=\dfrac{G}{\cos\alpha}=\dfrac{mg}{g}4\pi^2\upsilon^2 l$

$$\rightarrow T=4\pi^2\upsilon^2 ml.$$

Varianta II. Când observatorul ia parte la mişcare.



Când observatorul este legat de mişcare, forţa centrifugă $\vec{F}_{cf}$ apare ca o forţă ce acţionează asupra corpului pe direcţia razei cercului şi având sensul ei.

Relaţia de echilibru se scrie:

$$\vec{G}+\vec{F}_{cf}+\vec{T}=0.$$

Din figură se vede: $tg\alpha=\dfrac{F_{cf}}{G}=\dfrac{m\omega^2 r}{mg}=\dfrac{\omega^2 r}{g}$

Se înlocuiesc pe $\omega=2\pi\upsilon$ şi $r=l\sin\alpha$, si se ajunge la acelaşi rezultat ca

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în prima variantă: $\alpha = \arccos\frac{g}{4\pi^2\upsilon^2 l}$

b) Mărimea forţei centrifuge: $F_{cp} = m4\pi^2\upsilon^2 l\sin\alpha$

c) Tensiunea în fir: $T = 4\pi^2\upsilon^2 ml$

Indiferent că folosim varianta I sau varianta II, ajungem la acelaşi formule pentru aflarea mărimilor fizice cerute în problemă.

In afară de variantele I şi II se poate aplica metoda proiecţiei relaţiei vectoriale a forţelor ce acţionează asupra punctului material pe axele 0X şi 0Y. Această metodă este mai comodă şi dă rezultate mai rapide.

În cazul problemei noastre relaţia vectorială este: $\vec{G} + \vec{F}_{cp} + \vec{T} = 0$, şi pe care o proiectăm pe 0X şi apoi pe 0Y şi obţinem:

$$\begin{cases} 0 - F_{cp} - T\sin\alpha = 0 \to 0X \\ mg + 0 - T\cos\alpha = 0 \to 0Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{cp} = T\sin\alpha \\ mg = T\cos\alpha \end{cases}$$ Prin împărţirea relaţiilor obţinem:

$$\frac{F_{cp}}{mg} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \to \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \to \frac{m\omega^2 l\sin\alpha}{mg} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \to$$

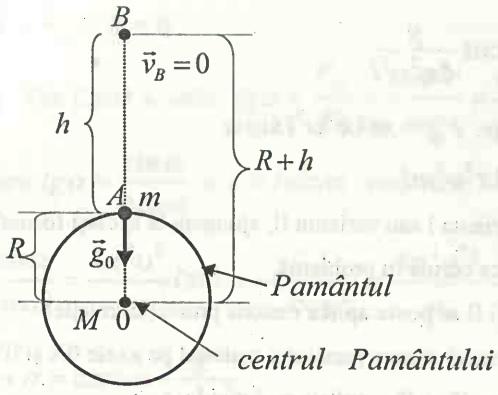
$$\to \frac{\omega^2 l}{g} = \frac{1}{\cos\alpha} \to \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l} = \frac{g}{4\pi^2\nu^2 l} \to \cos\alpha = \frac{g}{4\pi^2\nu^2 l}$$

$\alpha = \arccos\frac{g}{4\pi^2\nu^2 l}$, $F_{cp} = F_{cf} = m4\pi^2\upsilon^2 l\sin\alpha$ şi $T = 4\pi^2\upsilon^2 ml$

61. Un proiectil se trage în direcţie verticală de la suprafaţa Pământului . Să se calculeze înălţimea maximă h la care urcă proiectilul, dacă viteza iniţială este v_0 şi raza Pământului R . Se neglijează frecările şi rotaţia Pământului.

(Fizica clasa IX, pag.237 ed. 1993)

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Rezolvare:

Varianta I
(teorema variației energiei mecanice)

Aplicăm legea conservării energiei mecanice în A și B:

$E_C^A + E_p^A = E_C^B + E_p^B \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{mv_0^2}{2} - mg_0R = 0 - mg(R+h) \rightarrow \frac{v_0^2}{2} - g_0R = -g(R+h) \quad (1)$$

Cum $g = \frac{g_0R^2}{(R+h)^2}$ și înlocuind în relația (1) obținem:

$$\frac{v_0^2}{2} - g_0R = -\frac{g_0R^2}{(R+h)^2}(R+h) \rightarrow \frac{v_0^2}{2} - g_0R = -\frac{g_0R^2}{R+h} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v_0^2}{2} = g_0R - \frac{g_0R^2}{R+h} \rightarrow \frac{v_0^2}{2} = g_0R\left(1 - \frac{R}{R+h}\right) \rightarrow$$

$$\frac{v_0^2}{2} = g_0R\left(\frac{R+h-R}{R+h}\right) \rightarrow \frac{v_0^2}{2} = g_0R\frac{h}{R+h} \rightarrow v_0^2R + v_0^2h = 2g_0Rh \rightarrow$$

$$\rightarrow v_0^2R = 2g_0Rh - v_0^2h \rightarrow v_0^2R = h(2g_0R - v_0^2) \rightarrow h = \frac{v_0^2R}{2g_0R - v_0^2}$$

Varianta I I
(teorema variației energiei cinetice)

Aplicăm legea conservării energiei cinetice între A și B:

$\Delta E_C = L$ (1) introducem relațiile $\Delta E_C = E_c^B - E_c^A$ și $L_{AB} = -mg_1h$

în relația (1) și obținem: $E_c^B - E_c^A = L_{AB} \rightarrow 0 - \frac{mv_0^2}{2} = -mg_1h \rightarrow$

$\frac{v_0^2}{2} = g_1h$ unde $g_1 = \sqrt{g_0g}$ și reprezintă media geometrică a lui g_0 și

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

g, întrucât aceste mărimi variază invers proporţional cu pătratul distanţei la care se calculează:

$g_0 = \frac{KM}{R^2}$ şi $g = \frac{KM}{(R+h)^2}$. Făcând câtul dintre g şi g_0 obţinem:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{KM}{(R+h)^2}\frac{R^2}{KM} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \rightarrow g = \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}.$$

Expresia $g = \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}$, o introducem în $g_1 = \sqrt{g_0 \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}} = \frac{g_0 R}{R+h}$.

Am aflat acceleraţia gravitaţională g_1 ca medie geometrică a acceleraţiilor gravitaţionale g_0 şi g.

Introducem relaţia $g_1 = \frac{g_0 R}{R+h}$ în expresia $\frac{v_0^2}{2} = g_1 h$ obţinem:

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{g_0 Rh}{R+h} \rightarrow v_0^2 R + v_0^2 h = 2g_0 Rh \rightarrow v_0^2 R = 2g_0 Rh - v_0^2 h \rightarrow$$

$$\rightarrow v_0^2 R = h(2g_0 R - v_0^2) \rightarrow \quad h = \frac{v_0^2 R}{2g_0 R - v_0^2}.$$

S-a găsit prin varianta II aceiaşi expresie a lui $h = \frac{v_0^2 R}{2g_0 R - v_0^2}$

Varianta III
(Cu ajutorul formulei lui Galileo-Galilei)

Aplicăm formula lui între Galileo-Galilei între A şi B:

$v_B^2 = v_o^2 - 2g_1 h$. Cum în B proiectilul se opreşte v_B=0 şi atunci obţinem:

$0 = v_o^2 - 2g_1 h$. Dar $g_1 = \frac{g_0 R}{R+h}$ calculat în cazul variantei II, şi atunci:

$$0 = v_o^2 - 2\frac{g_0 R}{R+h}h \rightarrow 2\frac{g_0 R}{R+h}h = v_o^2 \rightarrow 2g_0 Rh = v_o^2 R + v_o^2 h \rightarrow$$

$$\rightarrow h(2g_0 R - v_o^2) = v_o^2 R \rightarrow \quad h = \frac{v_o^2 R}{2g_0 R - v_o^2}$$

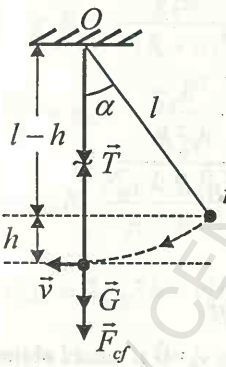
BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Indiferent, că am folosit varianta I, varianta II sau varianta III, prin aplicarea corectă a legilor respective şi printr-un calcul matematic adecvat, s-a ajuns la aceiaşi relaţie pentru calcularea lui $h = \frac{v_o^2 R}{2g_0 R - v_o^2}$, unde cunoscute sunt: v_0, R şi g_0.

62. Un pendul gravitaţional de masă m şi lungime l se îndepărtează de poziţia de echilibru cu un unghi α. Să se calculeze:

a) viteza şi tensiunea din fir când pendulul trece prin poziţia de echilibru.

b) Sa se calculeze unghiul β, pentru ca la trecerea prin poziţia de echilibru tensiunea mecanică să fie dublul greutăţii. (Fizica clasa IX, pag.238 ed 1993).



Rezolvare:

a) Când pendulul gravitaţional trece prin poziţia de echilibru putem scrie:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \rightarrow \; 2gh = v^2 \quad (1)$$

Din figură se vede : $\cos\alpha = \frac{l-h}{l} \rightarrow$

$l\cos\alpha = l - h \rightarrow \; h = l(1-\cos\alpha)$.

Din relaţia (1) : $v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$.

Calcularea tensiunii T. Din figură se vede:

$$T = F_{cf} + G = \frac{mv^2}{l} + mg = m\left(\frac{v^2}{l} + g\right) = m\left[\frac{1}{l}2gl(1-\cos\alpha) + g\right] =$$

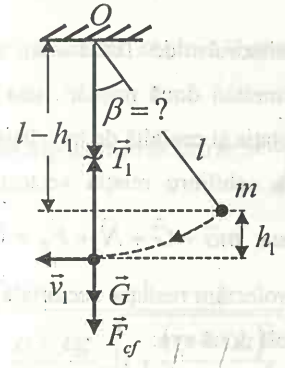
$$= mg(2 - 2\cos\alpha + 1) = mg(3 - 2\cos\alpha).$$ Mărimile fizice calculate

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sunt: $v=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$ şi $T=mg(3-2\cos\alpha)$.

Cunoscându-se : g,l,α şi m se pot afla v şi T în condiţiile problemei date.

b) Aflarea unghiului β.



Când pendulul gravitaţional trece prin poziţia de echilibru, scriem: $mgh_1=\frac{mv_1^2}{2}\rightarrow$

$\rightarrow 2gh_1=v_1^2$ (1)

Cum $h_1=l(1-\cos\beta)$, atunci relaţia (1) devine: $2gl(1-\cos\beta)=v_1^2\rightarrow$

$\rightarrow v_1=\sqrt{2gl(1-\cos\beta)}$.

Dar noi trebuie să determinăm pe β şi atunci ne folosim şi de $T_1=F_{cf}+G$ în care $T_1=2mg$, $F_{cf}=\frac{mv_1^2}{l}$ şi $G=mg$, încât obţinem :

$$2mg=\frac{mv_1^2}{l}+mg\rightarrow 2g=\frac{v_1^2}{l}+g\rightarrow 2g-g=\frac{v_1^2}{l}\rightarrow g=\frac{v_1^2}{l}\rightarrow$$

$\rightarrow gl=v_1^2$. Întrucât $v_1^2=2gl(1-\cos\beta)$, obţinem: $gl=2gl(1-\cos\beta)$

$$1=2-2\cos\beta\rightarrow 2\cos\beta=2-1\rightarrow 2\cos\beta=1\rightarrow\cos\beta=\frac{1}{2}\rightarrow\beta=\frac{\pi}{3}=60^o$$

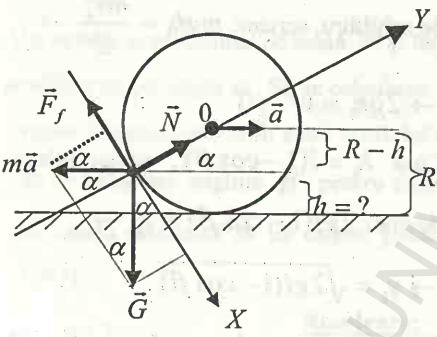
Pentru ca tensiunea mecanică să fie dublul greutăţii masei pendulului, când trece prin poziţia de echilibru, trebuie îndepărtat la un unghi de $\beta=60^o$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

63. Un tub cilindric de rază $R = 1m$ se rostogoleşte pe un plan orizontal, astfel încât axa lui se mişcă accelerat cu acceleraţia $a = 4{,}9m/s^2$.

Pe suprafaţa interioară a tubului se află un mic corp, care are coeficientul de frecare la alunecare cu suprafaţa tubului de 0,5. La ce înălţime se va găsi corpul? (Culegere Hristiev, pag.30 ed. 1983)

Rezolvare:



Cilindrul de rază R are simultan două mişcări: una de rotaţie şi cealaltă de translaţie . La echilibru relaţia vectorială este: $m\vec{a} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm realaţia vectorială pe cele două axe:

0X: $-ma\sin\alpha + mg\cos\alpha + 0 - F_f = 0$ şi

0Y: $-ma\cos\alpha - mg\sin\alpha + N - 0 = 0$

Cum $F_f = \mu N$, atunci sistemul devine:

$$\begin{cases} -ma\sin\alpha + mg\cos\alpha - \mu N = 0 \\ -ma\cos\alpha - mg\sin\alpha + N = 0 \end{cases}$$

Din ecuaţia a doua din sistem scoatem valoarea lui N:

$N = ma\cos\alpha + mg\sin\alpha$ şi o introducem în prima ecuaţie şi obţinem:

$-ma\sin\alpha + mg\cos\alpha - \mu ma\cos\alpha - \mu mg\sin\alpha = 0$ sau

$-a\sin\alpha + g\cos\alpha - \mu a\cos\alpha - \mu g\sin\alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow g\cos\alpha = \mu a\cos\alpha + \mu g\sin\alpha + a\sin\alpha \rightarrow$

$$g\cos\alpha = (\cos\alpha)(\mu a + \mu g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + a\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}) \rightarrow$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow g = \mu a + \mu g tg\,\alpha + a tg\,\alpha \rightarrow g - \mu a = (tg\,\alpha)(a + \mu g) \rightarrow$$

$$tg\,\alpha = \frac{g - \mu a}{a + \mu g}.$$

Din figură: $\sin\alpha = \frac{R-h}{R} \rightarrow R\sin\alpha = R - h \rightarrow \quad h = R(1 - \sin\alpha)$.

Ne trebuie $\sin\alpha$, însă îl avem pe $tg\,\alpha = \frac{g - \mu a}{a + \mu g}$.

Din trigonometrie $\sin\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{g - \mu a}{a + \mu g} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{g - \mu a}{a + \mu g}\right)^2}} =$

$$= \frac{1}{\frac{a + \mu g}{g - \mu a}\sqrt{1 + \frac{(g - \mu a)^2}{(a + \mu g)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(a + \mu g)^2}{(g - \mu a)^2} + \frac{(a + \mu g)^2 (g - \mu a)^2}{(g - \mu a)^2 (a + \mu g)^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a + \mu a}{g - \mu g}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a + \mu a}{g - \mu g}\right)^2}}.$$

Deci: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a + \mu a}{g - \mu g}\right)^2}}$. Înlocuind expresia lui $\sin\alpha$ în

$h = R(1 - \sin\alpha)$ obținem $h = R\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a + \mu a}{g - \mu g}\right)^2}}\right]$.

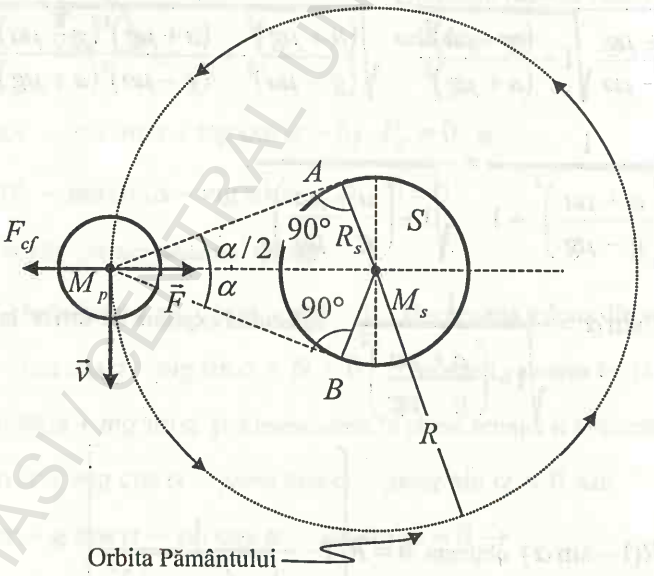
BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Numeric : $h = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4,9+0,5\bullet 9,8}{9,8-0,5\bullet 4,9}\right)^2}}\right] = 0,4m$ deci $h = 0,4m$.

64. Să se calculeze accelerația gravitațională (de cădere liberă) la suprafața Soarelui, cunoscând durata T, distanța Pământ-Soare $R = 149,5 \bullet 10^6 Km$ și unghiul $\alpha = 32'$ sub care se vede de pe Pământ discul Solar.

(Culegere Hristiev, pag.33 ed. 1983).

Rezolvare:



$\vec{F} \rightarrow$ forța de atracție dintre Soare și Pământ

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\vec{F}_{cf} \rightarrow$ forța centrifugă asupra Pământului.

Pentru ca Pământul să se mențină pe orbita sa aproximativ circulară, trebuie ca

$$F = F_{cf} \rightarrow \frac{KM_pM_s}{R^2} = M_p\omega^2 R \rightarrow K\frac{M_s}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}R \rightarrow$$

$$\rightarrow KM_s = \frac{4\pi^2R^3}{T^2} \quad (1).$$

Cum $\rightarrow KM_s = g_sR_s^2$, atunci relația (1) devine:

$$g_sR_s^2 = \frac{4\pi^2R^3}{T^2} \rightarrow g_s = \frac{4\pi^2R^3}{T^2R_s^2}.$$

Din figură se vede că : $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R_s}{R} \rightarrow R_s = R\sin\frac{\alpha}{2}$, încât

$$g_s = \frac{4\pi^2R^3}{T^2R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\pi^2R}{T^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \rightarrow g_s = \frac{4\pi^2R}{T^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Pentru unghiuri foarte mici (de ordinul minutelor) $\sin\frac{\alpha}{2} \cong \frac{\alpha}{2}$ și atunci

$\sin^2\frac{\alpha}{2} \cong \frac{\alpha^2}{4}$, încât relația $g_s \cong \frac{4 \bullet 4\pi^2R}{T^2\alpha^2} \cong \frac{16\pi^2R}{T^2\alpha^2}$.

Accelerația gravitațională g_s la suprafața Soarelui, are formula aproximativă:

$$g_s \cong \frac{16\pi^2R}{T^2\alpha^2}.$$

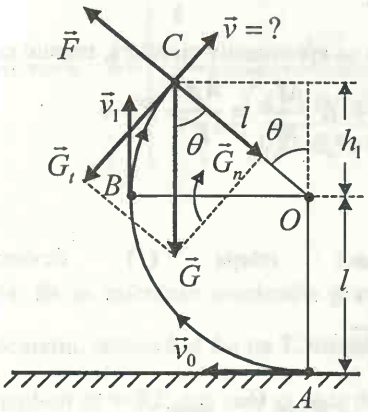
Numeric se găsește că $g_s \cong 273\ m/s^2$, ceea ce ne dovedește că atracția corpurilor la suprafața Soarelui este foarte mare, comparativ cu atracția corpurilor de către Pământ.

65. Unei bile suspendate pe un fir de lungime l i se imprimă o viteză orizontală v_0. La ce înălțime firul va slăbi și bila nu se va mișca pe cerc?

Ce viteză va avea bila în acest moment?

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:



Aplicăm legea conservării energiei mecanice între stările A şi C:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg(l+h_1) + \frac{mv^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v_0^2}{2} = g(l+h_1) + \frac{v^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_0^2 = 2g(l+h_1) + v^2 \quad (1)$$

Aflarea lui $h_1 = l\cos\theta$.

Din relaţia de echilibru a forţelor starea

C: $F_{cf} = G_n \rightarrow \frac{mv^2}{l} = mg\cos\theta \rightarrow$

$\frac{v^2}{l} = g\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{v^2}{lg}$. Înlocuim pe $\cos\theta = \frac{v^2}{lg}$ în relaţia :

$h_1 = l\cos\theta$ şi obţinem : $h_1 = \frac{v^2}{g}$ pe care o substituim în relaţia (1) şi avem:

$$v_0^2 = 2g(l+\frac{v^2}{g}) + v^2 \rightarrow v_0^2 = 2gl + \frac{2gv^2}{g} + v^2 = 2gl + 2v^2 + v^2 =$$

$$= 2gl + 3v^2 \rightarrow v_0^2 - 2gl = 3v^2 \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gl}{3}} .$$

Cum $h = l + h_1$ şi $h_1 = \frac{v^2}{g}$, vom avea $h = l + \frac{v^2}{g}$.

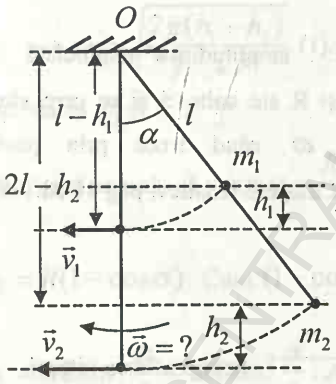
Cunoscând pe $v = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gl}{3}}$ vom obţine pentru h expresia :

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$h = l + \frac{v_0^2 - 2gl}{3g}$. Bila la înălţimea $h = l + \frac{v_0^2 - 2gl}{3g}$ are viteza $v = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gl}{3}}$.

66. Pe o tijă de masă neglijabilă, având la capătul superior o articulaţie , sunt fixate două corpuri de mase m_1 şi m_2, la distanţe egale între ele şi articulaţie. Tija este deviată cu unghiul α şi lăsată liber. Ce viteză unghiulară va avea tija atunci când trece prin poziţia verticală? (Culegere Hristiev, pag40 , ed.1983)

Rezolvare:



Aplicăm sistemului mecanic legea conservării energiei mecanice:

$m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$ (1) unde

$v_1 = \omega l$, $v_2 = 2\omega l$

$h_1 = l(1 - \cos\alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ şi

$h_2 = 2l(1 - \cos\alpha) = 2l 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

Se introduc h_1, h_2, v_1 şi v_2 în relaţia (1) şi obţinem:

$$m_1 g 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} + m_2 g 4l \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{m_1}{2} \omega^2 l^2 + \frac{m_2}{2} 4\omega^2 l^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2gl(m_1 + 2m_2) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \omega^2 l^2 (m_1 + 4m_2) \rightarrow$$

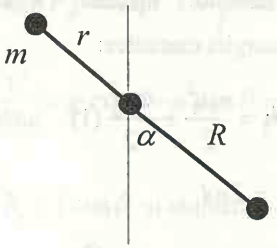
BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow 4g(m_1+2m_2)\sin^2\frac{\alpha}{2}=\omega^2 l(m_1+4m_2)\rightarrow$$

$$\rightarrow \omega^2=\frac{4g(m_1+2m_2)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{l(m_1+4m_2)}\rightarrow \omega=2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{g(m_1+2m_2)}{l(m_1+m_2)}}.$$

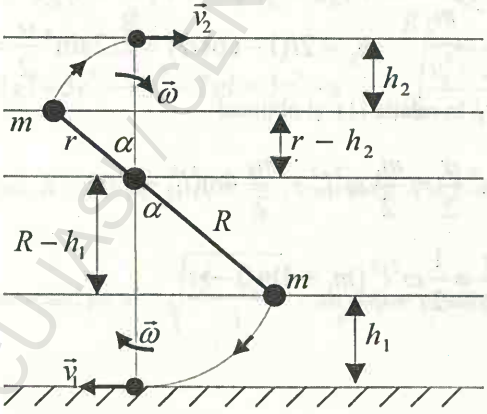
Prin poziţia verticală tija va avea: $\omega = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\dfrac{g(m_1+2m_2)}{l(m_1+m_2)}}$.

67. O halteră formată din două bile identice legate printr-o tijă de masă neglijabilă, oscilează în planul vertical, în jurul unei articulaţii conform figurii .



Se cunosc : amplitudinea unghiulară α, braţele r şi R ale halterei şi se cere viteza unghiulară ω când trece prin poziţia verticală. (Culegere Hristiev, pag 41/ed.1983)

Rezolvare:



Pentru aflarea vitezei unghiulare a halterei, trebuiesc cunoscute vitezele :

v_1 şi v_2 şi de aceea vom aplica legea conservării energiei mecanice.

Masa m posedă energie

potențială gravitațională la h_1 și când haltera este lăsată liberă, se transformă în energie cinetică $\frac{mv_1^2}{2}$, în energie cinetică $\frac{mv_2^2}{2}$ și energia potențială gravitațională mgh_2, ceea putem scrie: $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \rightarrow$

$\rightarrow gh_1 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2$: unde $v_1 = \omega R$ și $v_2 = \omega r$, încât obținem:

$$gh_1 = \frac{1}{2}\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + gh_2 \rightarrow 2gh_1 = \omega^2 R^2 + \omega^2 r^2 + 2gh_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2g(h_1 - h_2) = \omega^2(R^2 + r^2) \rightarrow \omega^2 = \frac{2g(h_1 - h_2)}{R^2 + r^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{R^2 + r^2}} \quad (1).$$

Calcularea h_1 și h_2.

Din figură se vede că: $\cos\alpha = \frac{R - h_1}{R} \rightarrow R\cos\alpha = R - h_1 \rightarrow$

$h_1 = R(1 - \cos\alpha)$. Cum $(1 - \cos\alpha) = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, avem:

$h_1 = R2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Analog calculăm pe h_2:

$\cos\alpha = \frac{r - h_2}{r} \rightarrow \quad h_2 = 2r\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Cunoscând pe $h_1 = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}$ și $h_2 = 2r\sin^2\frac{\alpha}{2}$ și folosind relația (1)

obținem: $\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g(2R\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2r\sin^2\frac{\alpha}{2})}{R^2 + r^2}}$, încât:

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\omega = 2(\sin\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{g(R-r)}{R^2+r^2}}.$$

Viteza unghiulară ω a halterei va fi: $\omega = 2(\sin\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{g(R-r)}{R^2+r^2}}$.

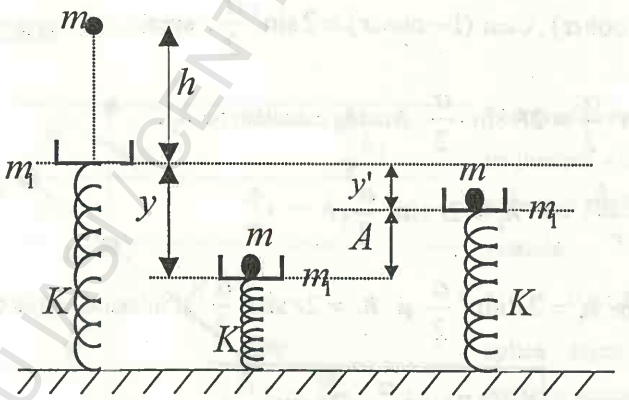
68. Se consideră un corp de masă m ce lăsat liber de la o înălțime h, față de un platan, îl lovește plastic și sistemul mecanic astfel plasat va oscila cu o anumită amplitudine ce trebuie aflată.

Platanul de masă m_1 este sudat la capătul superior al resortului situat în poziția verticală iar celălalt capăt inferior este fixat într-un punct pe un plan orizontal. Se cunoaște constanta de elasticitate K a resortului și se cere:

a) viteza sistemului mecanic după ciocnirea plastică a corpului de masă m cu platanul de masă m_1;

b) amplitudinea de oscilație

Rezolvare:



a) din figură se vede că elongația $y = y' + A \rightarrow A = y - y'$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Trebuiesc aflate y şi y'. Deformaţia y', datorită greutăţii corpului de masă m, se află cu ajutorul legii lui Hooke: $mg = ky' \rightarrow y' = \frac{mg}{k}$. Deci $A = y - \frac{mg}{k}$. Pentru a afla pe y, trebuie să ştim viteza sistemului mecanic după ciocnirea plastică şi pe baza legii conservării energiei, vom putea afla elongaţia y. Dar mai întâi aflăm viteza sistemului după ciocnire. Calcularea vitezei v' se face pe baza conservării impulsurilor mecanice:

$$mv + 0 = (m + m_1)v' \rightarrow v' = \frac{mv}{m + m_1}.$$

Dar $v = \sqrt{2gh}$, încât $mv + 0 = (m + m_1)v' \rightarrow v' = \frac{m\sqrt{2gh}}{m + m_1}$, unde v' reprezintă viteza sistemului mecanic după ciocnirea plastică.

b) Scriem legea conservării energiei:

$\frac{(m + m_1)v'^2}{2} = \frac{ky^2}{2} - (m + m_1)y$. Se înlocuieşte $v' = \frac{m\sqrt{2gh}}{m + m_1}$ şi se obţine ecuaţia de gradul II în y^2 de forma:

$$K(m + m_1)y^2 - 2(m + m_1)^2 gy - m^2 v^2 = 0$$

Prin rezolvarea acestei ecuaţii se găseşte :

$$y = \frac{g(m + m_1)^2 + \sqrt{(m + m_1)^4 g^2 + k(m + m_1)mv^2}}{k(m + m_1)}, \text{ unde } v^2 = 2gh.$$

Înlocuind pe y în $A = y - \frac{mg}{k}$ obţinem:

BUCUREŞTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

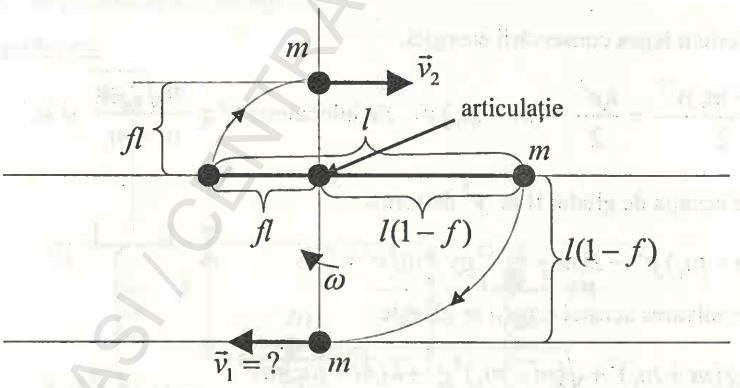
$$A=\frac{g(m+m_1)^2+\sqrt{(m+m_1)^4g^2+(m+m_1)m2gh}}{k(m+m_1)}-\frac{mg}{k}=$$

$$=\frac{1}{k}\left[\frac{g(m+m_1)^2+\sqrt{(m+m_1)^4g^2+(m+m_1)m2gh}}{m+m_1}-mg\right]$$

Ca rezultate cerute în problemă avem:

$$v'=\frac{m\sqrt{2gh}}{m+m_1} \text{ şi } A=\frac{1}{k}\left[\frac{g(m+m_1)^2+\sqrt{(m+m_1)^4g^2+(m+m_1)m2gh}}{m+m_1}-mg\right].$$

69. O halteră formată din două bile legate între ele printr-o tijă subțire de lungime l şi de masă neglijabilă este fixată printr-o articulație la distanța fl de una din bile, astfel încât se poate roti liber în jurul articulației, în plan vertical. Lăsată liber din poziția orizontală, ce viteză va avea bila inferioară când haltera trece prin poziția verticală? (Culegere Hristiev, pag 41 ed. 1983).



Aplicăm legea conservării energiei acestui sistem mecanic:

$$mgl(1-f)=\frac{mv_1^2}{2}+mgfl+\frac{mv_2^2}{2}\rightarrow$$

$$\rightarrow 2gl(1-f)=v_1^2+2gfl+v_2^2.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Vitezele liniare v_1 şi v_2 se calculează cu relaţiile:

$v_1 = \omega l(1-f)$ şi $v_2 = \omega f l$.

Facem raportul vitezelor v_1 şi v_2 şi obţinem :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1-f}{f}$$

Avem de rezolvat sistemul : $\begin{cases} 2gl(1-f) = v_1^2 + 2gfl + v_2^2 \\ \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{1-f}{f} \end{cases}$

necunoscutele sunt v_1 şi v_2.

În problemă se cere v_1, aşa că din ecuaţia a doua din sistem $v_2 = \dfrac{v_1 f}{1-f}$ şi o substituim în prima ecuaţie a sistemului:

$$2gl(1-f) = v_1^2 + 2gfl + \frac{v_1^2 f^2}{(1-f)^2} \rightarrow 2gl(1-f) - 2gfl = v_1^2\left[1 + \frac{f^2}{(1-f)^2}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow 2gl(1-f-f) = v_1^2 \frac{(1-f)^2 + f^2}{(1-f)^2} \rightarrow 2gl(1-2f) = v_1^2 \frac{(1-f)^2 + f^2}{(1-f)^2} \rightarrow$$

$$v_1^2 = \frac{2gl(1-2f)(1-f)^2}{(1-f)^2 + f^2} \rightarrow \qquad v_1 = (1-f)\sqrt{\frac{2gl(1-2f)}{(1-f)^2 + f^2}}.$$

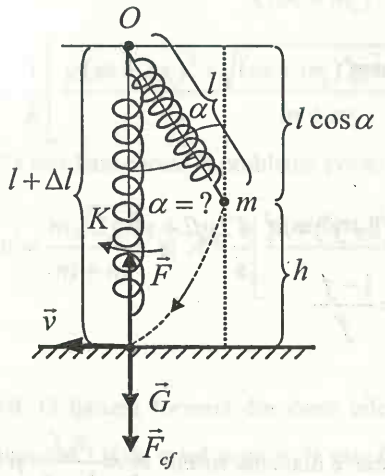
Numeric: $l = 0{,}5$ m, $f = \dfrac{1}{4}$, $g \cong 10 m/s^2$ şi se găseşte $v_1 \cong 2{,}2 m/s$.

70. Pe un resort elastic de constantă k şi de lungime nedeformată l, deviat de la verticală, este atârnat un corp de masă m. Lăsat liber, resortul arată o forţă F când trece prin poziţia verticală. Cu ce unghi a fost deviat resortul iniţial?

BCU IAŞI / GENERAL UNIVERSITY LIBRARY

(Culegere Hristiev, pag.42 ed. 1983).

Rezolvare:



$F \rightarrow$ forța elastică când resortul elastic trece cu viteza v prin poziția verticală;

$G \rightarrow$ greutatea corpului de masă m;

$l \rightarrow$ lungimea nedeformată a resortului îndepărtat la unghiul α necunoscut;

$K \rightarrow$ constanta elastică a resortului;

$\Delta l \rightarrow$ deformația resortului când trece prin poziția verticală;

$F_{cf} \rightarrow$ forța centrifugă;

$l + \Delta l \rightarrow$ lungimea liniară a resortului când trece prin poziția verticală;

$h \rightarrow$ altitudinea resortului față de Pământ

Conform figurii scriem: $l + \Delta l = h + l\cos\alpha \rightarrow l + \Delta l - l\cos\alpha = h \rightarrow$

$\rightarrow l(1-\cos\alpha) + \Delta l = h$. Dar $F = K\Delta l$ (legea lui Hooke) de unde

$\Delta l = \frac{F}{K}$ și substituind în relația : $l(1-\cos\alpha) + \Delta l = h$, obținem

$l(1-\cos\alpha) + \frac{F}{K} = h$ (1).

Aplicăm legea conservării energiei mecanice:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{K(\Delta l)^2}{2} \rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{K}{2}\frac{F^2}{K^2} \rightarrow$$

$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{F^2}{2mgK}$ (2). Egalăm relațiile (1) și (2) și avem:

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$l(1-\cos\alpha)+\frac{F}{K}=\frac{v^2}{2g}+\frac{F^2}{2mgK}\rightarrow$$

$$\rightarrow l(1-\cos\alpha)=\frac{v^2}{2g}+\frac{F^2}{2mgK}-\frac{F}{K}\rightarrow$$

$$\rightarrow 1-\cos\alpha=\frac{v^2}{2gl}+\frac{F^2}{2mgKl}-\frac{F}{lK}\rightarrow$$

$$\rightarrow 1-\frac{v^2}{2gl}-\frac{F^2}{2mgKl}+\frac{F}{lK}=\cos\alpha\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2gl-v^2}{2gl}-\frac{F^2}{2mgKl}+\frac{F}{lK}=\cos\alpha\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2mgKl-mKv^2-F^2+2Fmg}{2mgKl}=\cos\alpha \quad \text{sau}$$

$$\cos\alpha=\frac{2mgKl-mKv^2-F^2+2Fmg}{2mgKl} \quad (3)$$

Când sistemul mecanic trece prin poziția verticală, putem scrie:

$$F=mg+F_{cf}\rightarrow \quad F-F_{cf}=mg\rightarrow \quad F-mg=F_{cf}\rightarrow$$

$$F-mg=\frac{mv^2}{l+\Delta l}\rightarrow \quad F-mg=\frac{mv^2}{l+\frac{F}{K}}\rightarrow \quad F-mg=\frac{Kmv^2}{Kl+F}\rightarrow \text{ de}$$

unde: $Kmv^2=(F-mg)(Kl+F)$. Înlocuind $Kmv^2=(F-mg)(Kl+F)$ în relația (3) obținem:

$$\cos\alpha=\frac{2mgKl-(F-mg)(Kl+F)-F^2+2Fmg}{2mgKl}=$$

$$=\frac{2mgKl-\left[FKl+F^2-mglK-mgF\right]-F^2+2Fmg}{2mglK}=$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= \frac{2mglK - FKl - F^2 + 2mglK + mgF - F^2 + 2mgF}{2mglK} =$$

$$= \frac{3mglK - 2F^2 - FKl + 3mgF}{2mglK} = \frac{Kl(3mg - F) + F(3mg - 2F)}{2mglK} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos\alpha = \frac{Kl(3mg - F) + F(3mg - 2F)}{2mglK}.$$

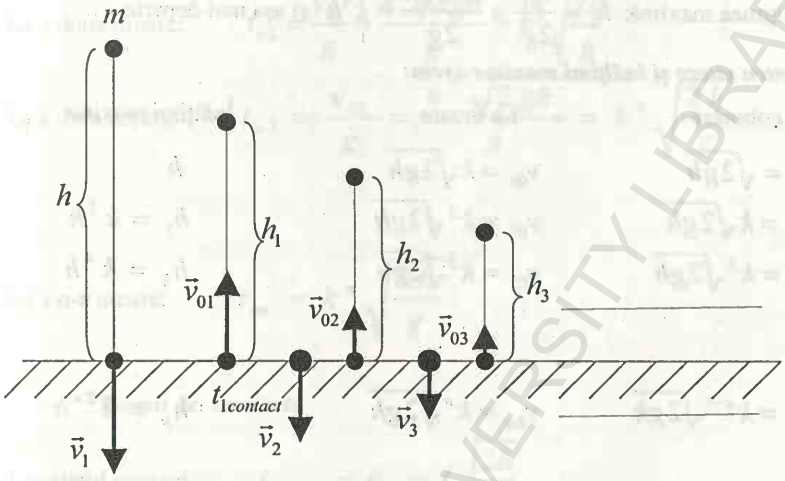
Numeric: $K = 100\frac{N}{m}$, $l = 1m$, $m = 1{,}5kg$, $F = 30N$, $g \cong 10m/s^2$ şi se găseşte $\cos\alpha = 0{,}35 \rightarrow \alpha = 69°30'$.

71. O minge de masă m, cade fără viteză iniţială de la o înălţime h. După fiecare lovire a podelei, viteza mingii reprezintă o fracţiune k din viteza de dinainte de ciocnire, iar timpul de contact cu podeaua reprezintă o fracţiune f din timpul de cădere respectiv. Să se afle timpul până la oprirea definitivă a bilei şi căldura totală degajată. (Culegere Hristiev, pag.46 ed. 1983).

Rezolvare:

Pentru a afla timpul până la oprirea definitivă a bilei, trebuie să ştim mai întâi timpurile fiecărei faze (coborâre, contact şi urcare) şi apoi prin însumarea lor, vom afla timpul total (timpul până la oprirea definitivă a bile). Pentru a determina timpul fiecărei faza, trebuie calculate vitezele (la coborâre, după contact) şi înălţimile maxime după ciocnirile succesive cu podeaua. În ajutorul acestor determinări, trebuie întocmit un desen, căci după cum vom constata, în rezolvarea ei, că această problemă este o problemă destul de complexă şi de aceea necesită o mare atenţie în scrierea legilor şi a calculul matematic.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Trebuie ţinut seama că la fiecare ciocnire a bilei cu podeaua : $t_{contact} = ft_{cadere}$ şi viteza după contact: $v_{contact} = kv_{cadere}$. Aflarea vitezelor (la cădere, imediat după contact) şi înălţimile maxime corespunzătoare.

Viteza bilei la prima cădere: $v_1 = \sqrt{2gh}$, viteza după contact : $v_{01} = kv_1 = k\sqrt{2gh}$; prima înălţime maximă $h_1 = \frac{v_{01}^2}{2g} = \frac{1}{2g}k^2gh = k^2h$

Viteza bilei la a doua cădere : $v_2 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gk^2h} = k\sqrt{2gh}$, viteza după contact: $v_{02} = kv_2 = k^2\sqrt{2gh}$;

înălţimea maximă: $h_2 = \frac{v_{02}^2}{2g} = \frac{1}{2g}k^4gh = k^4h$.

Viteza bilei la a treia cădere : $v_3 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2gk^4h} = k^2\sqrt{2gh}$;

Viteza după contact: $v_{03} = kv_3 = kk^2\sqrt{2gh} = k^3\sqrt{2gh}$;

BCUIAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

înălțimea maximă: $h_3 = \frac{v_{03}^2}{2g} = \frac{k^6 2gh}{2g} = k^6 h$ și așa mai departe ....

Pentru viteze și înălțimi maxime avem:

La coborâre	La urcare	Înălțimi maxime
$v_1 = \sqrt{2gh}$	$v_{01} = k\sqrt{2gh}$	h
$v_2 = k\sqrt{2gh}$	$v_{02} = k^2\sqrt{2gh}$	$h_1 = k^2 h$
$v_3 = k^2\sqrt{2gh}$	$v_{02} = k^3\sqrt{2gh}$	$h_2 = k^4 h$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$v_n = k^{n-1}\sqrt{2gh}$	$v_{0n} = k^n\sqrt{2gh}$	$h_n = k^{2n} h$

Timpii la coborâre:

La prima coborâre: $t_{c1} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

La a doua coborâre: $t_{c2} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}k^2 h} = k\sqrt{\frac{2h}{g}}$

La a treia coborâre: $t_{c3} = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}k^4 h} = k^2\sqrt{\frac{2h}{g}}$

La a patra coborâre: $t_{c4} = \sqrt{\frac{2h_3}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}k^6 h} = k^3\sqrt{\frac{2h}{g}}$

.
.
.

La a n-a coborâre: $t_{cn} = k^{n-1}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Timpii la urcare:

La prima urcare: $t_{u1} = \frac{v_{01}}{g} = \frac{k\sqrt{2gh}}{g} = k\sqrt{\frac{2h}{g}}$

BCU IASI / CENTRE UNIVERSITY LIBRARY

La a doua urcare: $t_{u2} = \frac{v_{02}}{g} = \frac{k^2\sqrt{2gh}}{g} = k^2\sqrt{\frac{2h}{g}}$

La a treia urcare: $t_{u3} = \frac{v_{03}}{g} = \frac{k^3\sqrt{2gh}}{g} = k^3\sqrt{\frac{2h}{g}}$

. . .

La a n-a urcare: $t_{un} = k^n\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Timpii de contact:

La primul contact : $t_{1contact} = ft_{c1} = f\sqrt{\frac{2h}{g}}$

La al doilea contact: $t_{2contact} = ft_{c2} = fk\sqrt{\frac{2h}{g}}$

La al treilea contact: $t_{3contact} = ft_{c3} = fk^2\sqrt{\frac{2h}{g}}$

. . .

La a al n-lea contact: $t_{ncontact} = fk^{n-1}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Timpii pentru ficecare fază (coborâre, contact şi urcare)

- Pentru prima fază: $t_1 = t_{c1} + t_{1contact} + t_{u1} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + f\sqrt{\frac{2h}{g}} + k\sqrt{\frac{2h}{g}} =$

$= (1 + f + k)\sqrt{\frac{2h}{g}}$

- Pentru a doua fază: $t_2 = t_{c2} + t_{2contact} + t_{u2} = k\sqrt{\frac{2h}{g}} + fk\sqrt{\frac{2h}{g}} + k^2\sqrt{\frac{2h}{g}} =$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$= k(1+f+k)\sqrt{\frac{2h}{g}}$;

- Pentru a treia fază: $t_3 = t_{c3} + t_{3contact} + t_{u3} = k^2(1+f+k)\sqrt{\frac{2h}{g}}$

- Pentru a n-a fază: $t_n = k^{n-1}(1+f+k)\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Deci: $t_1 = (1+f+k)\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$t_2 = (1+f+k)k\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$t_3 = (1+f+k)k^2\sqrt{\frac{2h}{g}}$

. .
. .
. .

$t_n = (1+f+k)k^{n-1}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Timpul total t se află însumând toate aceste timpuri: $t_1, t_2, t_3, ...t_n$:

$$t = (1+f+k)\sqrt{\frac{2h}{g}}(1+\underbrace{k+k^2+.....+k^{n-1}}_{S})$$

Şirul $1+k+k^2+.....+k^{n-1}$, reprezintă o progresie geometrică cu un număr infinit de termeni şi a cărei sumă se află cu formula: $S = \frac{1}{1-q}$, unde q reprezintă raţia progresiei şi în cazul nostru $q = k$, iar $S = \frac{1}{1-k}$, încât

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

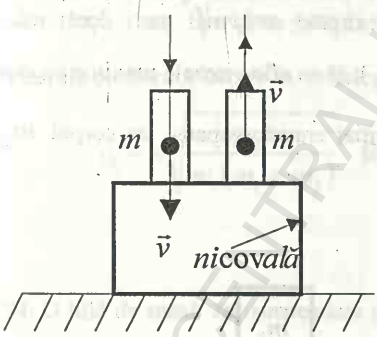
timpul total este: $t=(1+f+k)\frac{1}{1-k}\sqrt{\frac{2h}{g}}=\frac{1+f+k}{1-k}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ sau

$$t=\frac{1+f+k}{1-k}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Căldura totală degajată va fi : $Q=mgh$, întrucât prin ciocnirea succesivă, bila va pierde energia sa potențială gravitațională, cu podeaua .

72. Un ciocan de masă m loveşte o nicovală cu viteza v şi ricoşează cu o viteză de n ori mai mică. Care este cantitatea de căldură degajată prin ciocnire şi variația impulsului ciocanului. (Culegere Hristiev, pag.46 /ed. 1983)

Rezolvare:



La contactul ciocanului cu nicovala, o parte din energia cinetică a acestuia este preluată de nicovală sub formă de căldură, iar restul de energie cinetică rămâne ciocanului pentru a se putea ridica de pe nicovală:

$\frac{mv^2}{2}=Q+\frac{mv_1^2}{2}\rightarrow Q=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}$. Se vede că Q provine din variația energiei cinetice a ciocanului.

Cum $v_1=\frac{v}{n}$, atunci $Q=\frac{m}{2}(v^2-v_1^2)=\frac{mv^2}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\rightarrow$

$$\rightarrow Q=\frac{mv^2(n^2-1)}{2n^2}.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru ca $Q>0$, trebuie ca $n>1$, adică ciocanul trebuie să lovească nicovala de un număr n cât mai mare. Pentru ca nicovala să nu se încălzească substanţial trebuie să fie construită dintr-un metal de masă mare.

Aflarea variaţiei impulsului ciocanului se face din relaţia vectorială: $\Delta\vec{p}=m\vec{v}_1-m\vec{v}$, unde modulul lui $\Delta\vec{p}$ este:

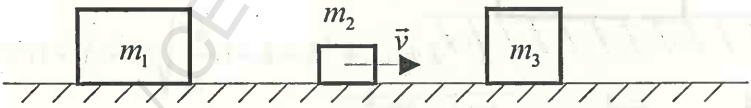
$$|\Delta\vec{p}|=\Delta p=\sqrt{m^2v_1^2+m^2v^2-2mv_1mv\cos 180^o}=m\sqrt{v_1^2+v^2+2v_1v}=$$

$$=m\sqrt{(v_1+v)^2}=m(v_1+v)=m\left(\frac{v}{n}+v\right)=mv\left(\frac{1}{n}+1\right)=\frac{mv(n+1)}{n}\rightarrow$$

$$\rightarrow|\Delta\vec{p}|=\Delta p=\frac{mv(n+1)}{n}.$$

73. Trei corpuri de mase m_1, m_2 şi m_3 pot aluneca fără frecare pe o masă orizontală. Ştiind că masele corpurilor extreme sunt mai mari decât masa corpului mijlociu ($m_1>>m_2, m_3>>m_2$), să se afle vitezele maxime pe care le pot câştiga corpurile extreme, dacă iniţial erau în repaus, iar corpul m_2, avea viteza orizontală v.

Rezolvare:



Întrucât sistemul mecanic este izolat, atunci: $\Delta P=0$ sau $P_3-P_1=0\rightarrow$

$\rightarrow P_3=P_1\rightarrow \quad m_3v_3=m_1v_1$.

Aplicăm teorema energiei cinetice:

$$\frac{m_2v^2}{2}=\frac{m_3v_3^2}{2}+\frac{m_1v_1^2}{2}\rightarrow m_2v^2=m_3v_3^2+m_1v_1^2.$$

Formăm sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} m_3v_3=m_1v_1 \\ m_2v^2=m_3v_3^2+m_1v_1^2 \end{cases}$ Necunoscute: v_1, v_3.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din prima ecuaţie a sistemului : $v_3 = \frac{m_1 v_1}{m_3}$ şi substituim în a doua ecuaţie din sistem: $m_2 v^2 = m_3 \frac{m_1^2 v_1^2}{m_3^2} + m_1 v_1^2 \rightarrow m_2 v^2 = \frac{m_1^2 v_1^2}{m_3} + m_1 v_1^2 \rightarrow$

$$\rightarrow m_2 v^2 = m_1 v_1^2 \left(\frac{m_1}{m_3} + 1 \right) \rightarrow v_1^2 = \frac{m_2 v^2}{m_1 \left(\frac{m_1 + m_3}{m_3} \right)} = \frac{m_2 m_3 v^2}{m_1 (m_1 + m_3)} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_1 = v \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1 (m_1 + m_3)}}$$

Aflarea lui v_3 :

$$v_3 = \frac{m_1 v_1}{m_3} = \frac{m_1}{m_3} v \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1 (m_1 + m_3)}} = v \sqrt{\frac{m_1^2 m_2 m_3}{m_3^2 m_1 (m_1 + m_3)}} = v \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_3 (m_1 + m_3)}}.$$

Vitezele corpurilor cerute în problemă sunt:

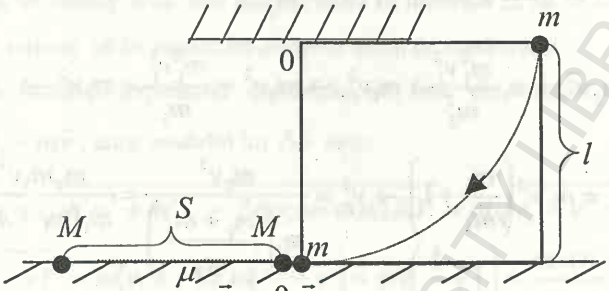
$$v_1 = v \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1 (m_1 + m_3)}} \quad \text{şi} \quad v_3 = v \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_3 (m_1 + m_3)}}$$

74. O bilă de masă m suspendată pe un fir de lungime l, a fost deviată până la poziţia orizontală a firului de suspensie şi lăsată liber. În punctul inferior al traiectoriei bila loveşte un corp de masă M care parcurge o distanţă S până se opreşte, în timp ce bila ricoşează, firul deviind până la un unghi α. Care este valoarea maximă posibilă a coeficientului de frecare dintre corp şi planul orizontal? (Culegere Hristiev, pag49 /ed. 1983)

Rezolvare:

Ciocnirea dintre bilă şi corp este perfect elastică . Înainte de ciocnire corpul de masă M are viteza $v_2 = 0$, iar bila va avea viteza $v_1 = \sqrt{2gl}$. Trebuiesc

aflate vitezele bilei şi a corpului după ciocnirea lor perfect elastică: v_1', v_2'.



mişcare uniform încetinită

La ciocnirea perfect elastică a două corpuri avem formulele:

$$v'_1 = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_1 \text{ şi } v'_2 = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_2 .$$

În cazul nostru $v_2 = 0$ şi $v_1 = \sqrt{2gl}$, încât vom avea :

$$v'_1 = 2\frac{mv_1 + 0}{m + M} - v_1 = \frac{2mv_1 - mv_1 - Mv_1}{m + M} = \frac{v_1(m - M)}{m + M} \rightarrow$$

$$\rightarrow v'_1 = \frac{(m - M)\sqrt{2gl}}{m + M}.$$

Pentru bilă, vom avea după ciocnire: $v'_1 = \dfrac{(m - M)\sqrt{2gl}}{m + M}$.

În cazul corpului de masă M :

$v'_2 = 2\dfrac{mv_1 + 0}{m + M} - 0 = \dfrac{2mv_1}{m + M} = \dfrac{2m\sqrt{2gl}}{m + M}$. Corpul de masă M va avea după ciocnire: $v'_2 = \dfrac{2m\sqrt{2gl}}{m + M}$.

Corpul de masă M va avea după ciocnire o mişcare uniform încetinită şi se va opri după parcurgerea distanţei S.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din formula Galileo-Galilei, scriem : $0 = v_2'^2 + 2aS \rightarrow$

$$\rightarrow -v_2'^2 = 2aS \rightarrow a = \frac{-v_2'^2}{2S} \quad (1).$$

Cum pe planul orizontal forţa motoare nu avem, atunci :

$$0 - F_f = ma \rightarrow -\mu mg = ma \rightarrow -\mu g = a$$

Substituind pe $a = -\mu g$ în (1) , vom avea:

$-\mu g = \frac{-v_2'^2}{2S} \Big| -1 \rightarrow 2\mu gS = v_2'^2$. Dar $v_2' = \frac{2m\sqrt{2gl}}{m+M}$ şi înlocuind în

$2\mu gS = v_2'^2$, obţinem: $2\mu gS = \frac{4m^2 2gl}{(m+M)^2} \rightarrow \mu = \frac{4m^2 l}{S(m+M)^2} \rightarrow$

$$\rightarrow \mu = \frac{l}{S}\left(\frac{2m}{m+M}\right)^2.$$

Coeficientul de frecare se calculează cu relaţia: $\mu = \frac{l}{S}\left(\frac{2m}{m+M}\right)^2$.

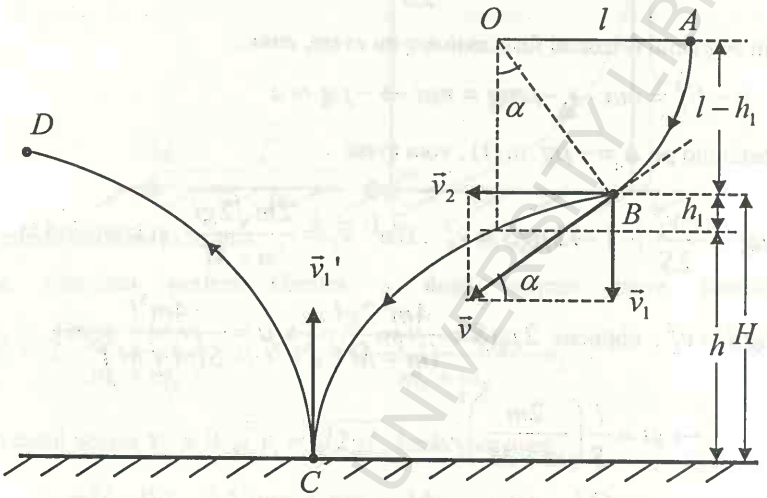
Întotdeauna coeficientul de frecare μ dintre corpuri este subunitar şi ca atare mărimile fizice din relaţie trebuiesc luate, de aşa valoare, ca substituindu-se, să obţinem: $\mu < 1$.

75. Un pendul gravitaţional de lungime l se află iniţial în repaus şi la înălţimea h deasupra unui plan orizontal. Se îndepărtează din starea de repaus până la orizontală, după care este lăsat liber şi la unghiul α ce-l face cu verticala din starea iniţială, firul se rupe, iar corpul care a fost legat de fir îşi continuă mişcarea şi ajungând în contact cu planul orizontal, se ciocneşte elastic şi se ridică până la o anumită înălţime maximă.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se traseze curba mişcării corpului pe tot traseul până la atingerea înălţimii maxime şi să se calculeze această înălţime.

Rezolvare:



Curba mişcării corpului din punctul A şi până în punctul D, unde trebuie să atingă înălţimea maximă h_m are trei porţiuni distincte: porţiunea AB în care corpul este legat de fir, porţiunea BC şi apoi CD după care îşi continuă mişcarea . Pe porţiunea AB corpul efectuează o mişcare circulară până în punctul B unde firul se rupe; pe porţiunea BC corpul are mişcare pe orizontală cu viteza v_2 şi una pe verticală cu viteza v_1, îndreptată de sus în jos. După un timp, ciocneşte elastic în punctul C planul orizontal. Pe ultima porţiune CD ce interesează în problemă, corpul exercită o mişcare oblică de un unghi α şi viteza v_1' şi atinge înălţimea maximă în punctul D, după un interval de timp. Înălţimea maximă h_m se calculează cu formula $h_m = \frac{v_1'^2}{2g}$.

Trebuie aflat v_1' şi pentru aceasta ne folosim de relaţia Galileo-Galilei:

$v_1'^2 = v_1^2 + 2gH$ unde $v_1 = v\sin\alpha$ şi $H = h + h_1$, încât:

$v_1'^2 = v^2\sin^2\alpha + 2g(h + h_1)$ (1). Din figură se vede că :

$\cos\alpha = \frac{l - h_1}{l} \rightarrow h_1 = l(1 - \cos\alpha)$. Substituind pe h_1 în relaţia (1)

,obţinem : $v_1'^2 = v^2\sin^2\alpha + 2g[h + l(1 - \cos\alpha)]$ (2).

Avem nevoie de v şi pentru aceasta scriem legea conservării energiei mecanice între stările A şi B :

$$mgl = \frac{mv^2}{2} + mgh_1 \rightarrow 2gl = v^2 + 2gl(1 - \cos\alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2gl = v^2 + 2gl - 2gl\cos\alpha \rightarrow 2gl\cos\alpha = v^2.$$

Introducem pe v^2 în relaţia (2) şi avem :

$$v_1'^2 = 2gl\cos\alpha\sin^2\alpha + 2gh + 2gl - 2gl\cos\alpha =$$

$$= (2gl\cos\alpha)(\sin^2\alpha - 1) + 2g(h + l) = 2g(h + l) - 2gl\cos\alpha^3,$$

unde $\sin^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha$. Deci $v_1'^2 = 2g(h + l - l\cos\alpha^3) =$

$$= 2g[h + l(1 - \cos\alpha^3)] \quad \text{sau} \quad v_1'^2 = 2g[h + l(1 - \cos\alpha^3)].$$

Substituim pe $v_1'^2 = 2g[h + l(1 - \cos\alpha^3)]$ în $h_m = \frac{v_1'^2}{2g}$ şi obţinem :

$$h_m = \frac{2g[h + l(1 - \cos\alpha^3)]}{2g} = h + l(1 - \cos\alpha^3).$$

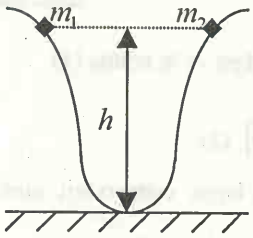
Relaţia căutată şi totodată răspunsul va fi: $h_m = h + l(1 - \cos\alpha^3)$.

76. Două corpuri de mase m_1 şi m_2 situate la aceleaşi înălţimi h alunecă la un moment dat, pe profilul curbei din figura alăturată şi apoi se ciocnesc plastic. La ce înălţime se va ridica ulterior sistemul mecanic astfel format?

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

(Culegere Hristiev, pag.50 /ed.1983)

Rezolvare:



La înălțimea h fiecare corp posedă energia gravitațională și lăsate liber vor avea în punctul cel mai de jos energie cinetică și din legea conservării energiei mecanice, vom putea afla vitezele v_1 și v_2 înainte de ciocnirea lor plastică:

$$m_1 gh = \frac{m_1 v_1^2}{2} \rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \quad \text{și} \quad m_2 gh = \frac{m_2 v_2^2}{2} \rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}\,.$$

Cum vitezele v_1 și v_2 sunt de semne contrare și pe baza legii conservării impulsurilor, scriem: $m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v \rightarrow v = \dfrac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

Înălțimea h_m la care se va ridica sistemul mecanic astfel format undeva într-un punct de pe profilul curbei, se află din aplicarea legii energiei mecanice:

$$\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = (m_1 + m_2) g h_m \rightarrow$$

$$\rightarrow h_m = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2g}\frac{m_2^2 v_2^2 - 2m_2 v_2 m_1 v_1 + m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

și cum $v_1 = \sqrt{2gh}$ și $v_2 = \sqrt{2gh}$ obținem:

$$h_m = \frac{1}{2g}\frac{m_2^2 2gh - 2m_2 m_1 2gh + m_1^2 2gh}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_2^2 h - 2m_2 m_1 h + m_1^2 h}{(m_1 + m_2)^2} =$$

$$= h\frac{m_2^2 - 2m_2 m_1 + m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = h\frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} = h\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$$

Înălțimea la care se va ridica sistemul mecanic, într-un punct pe profilul curbei

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

este:

$$h_m = h\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

77. Un pendul gravitaţional are lungimea l şi masa m_1. În atingere se găseşte un alt corp de masă $m_2 < m_1$, aflat în repaus şi aşezat la capătul unui plan orizontal care este situat la înălţimea h faţă de suprafaţa Pământului.

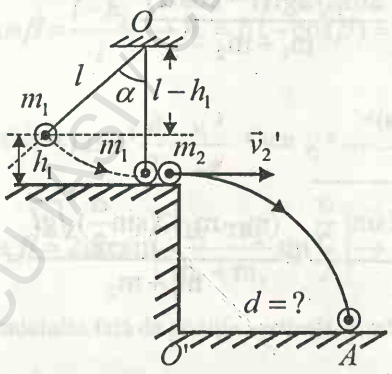
Se îndepărtează pendulul la unghiul α şi este lăsat liber.

a) să se afle energia cinetică a corpului de masă m_1, înainte de ciocnirea elastică cu corpul m_2 aflat în repaus şi în faţa pendulului gravitaţional la trecerea acestuia prin faţa poziţiei de echilibru.

b) Vitezele corpurilor m_1 şi m_2 după ciocnirea elastică ştiind că pendulul îşi continuă mişcarea, iar corpul m_2 are o mişcare pe orizontală cu viteza căpătată după ciocnire.

c) Să se afle unghiul β faţă de verticală unde se va opri pendulul, timpul cât face corpul de masă m_2 până într-un punct de pe suprafaţa Pământului şi distanţa dintre punctul unde cade corpul pe Pământ şi capătul planului orizontal unde a avut loc ciocnirea corpurilor.

Rezolvare



a) Îndepărtat la unghiul α faţă de verticală, pendulul gravitaţional are energie potenţială gravitaţională şi lăsat liber se transformă în energie

b) cinetică: $m_1 g h_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \rightarrow v_1^2 = 2gh_1$. Din figură:

$$\cos\alpha = \frac{l - h_1}{l} \rightarrow h_1 = l(1 - \cos\alpha).$$

$$E_{c1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1}{2} 2gh_1 = m_1 g h_1 = m_1 g l(1 - \cos\alpha) \rightarrow E_{c1} = m_1 g l(1 - \cos\alpha).$$

De la ciocnirea perfect elastică ştim că vitezele corpurilor după ciocnire se calculează cu formulele:

$$v_1' = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 \text{ şi } v_2' = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2.$$

În cazul nostru : $v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}$ şi $v_2 = 0$, încât:

$$v_1' = 2\frac{m_1 v_1 + 0}{m_1 + m_2} - v_1 = \frac{2m_1 v_1 - m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}}{m_1 + m_2};$$

$$v_2' = 2\frac{m_1 v_1 + 0}{m_1 + m_2} - 0 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}}{m_1 + m_2}$$

Cum $(1 - \cos\alpha) = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, atunci:

$$v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)\sqrt{2gl 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)2(\sin\frac{\alpha}{2})\sqrt{gl}}{m_1 + m_2} =$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

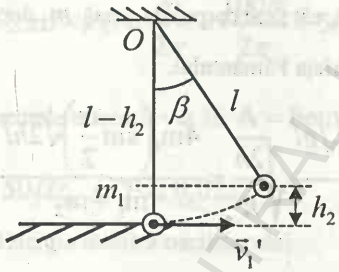
$= \dfrac{2(m_1 - m_2)\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\sqrt{gl}}{m_1 + m_2}$. În mod analog se află şi $v_2' = \dfrac{4m_1\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\sqrt{gl}}{m_1 + m_2}$.

Cele două viteze ale corpurilor după ciocnirea lor perfect elastică sunt:

$v_1' = \dfrac{2(m_1 - m_2)(\sin\dfrac{\alpha}{2})\sqrt{gl}}{m_1 + m_2}$ pentru pendulul gravitaţional de masă m_1 şi

$v_2' = \dfrac{4m_1(\sin\dfrac{\alpha}{2})\sqrt{gl}}{m_1 + m_2}$ pentru corpul de masă m_2.

c)Întocmim desenul pentru pendulul gravitaţional, ce este deviat cu unghiul β



Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru pendulul gravitaţional.

$\dfrac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 g h_2 \rightarrow$

$\rightarrow h_2 = \dfrac{v_1'^2}{2g}$. Dar

$\cos\beta = \dfrac{l - h_2}{l} \rightarrow h_2 = l(1 - \cos\beta) = l2\sin^2\dfrac{\beta}{2}$ şi

obţinem: $l2\sin^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{v_1'^2}{2g}$. Cum $v_1'^2 = \dfrac{4(m_1 - m_2)^2(\sin^2\dfrac{\alpha}{2})gl}{(m_1 + m_2)^2}$, vom căpăta:

$\rightarrow \beta = 2\arcsin\left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right) \rightarrow$ reprezintă unghiul de deviere a pendulului faţă de poziţia verticală, după ciocnirea elastică cu corpul de masă $m_2 < m_1$ sau $m_1 > m_2$.

BCUIAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă se lua $m_1 < m_2$, atunci pendulul ar fi ricoşat, după ciocnirea elastică cu corpul de masă m_2. Corpul de masă m_2 după ciocnirea perfect elastică cu corpul de masă m_1, va avea o mişcare de aruncare pe orizontală cu viteza $v_2' = \frac{4m_1(\sin\frac{\alpha}{2})\sqrt{gl}}{m_1+m_2}$. Mişcarea corpului de masă m_2 va fi alcătuită dintr-o mişcare rectilinie şi uniformă după orizontală şi dintr-o mişcare uniform accelerată cu acceleraţia gravitaţională de sus în jos, pe verticală şi fără viteză iniţială, încât ecuaţia de mişcare dup verticală de sus în jos este:

$$h = \frac{gt_c^2}{2} \rightarrow t_c = \sqrt{2\frac{h}{g}}.$$

Cunoscându-se h şi g putem afla timpul, cât face corpul de masă m_2 după ciocnire până într-un punct A de pe suprafaţa Pământului.

Distanţa $0'A = d = v_2' t_c = \frac{4m_1\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{gl}}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{4m_1\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2hl}}{m_1+m_2}$.

78. Un punct material de masă $m = 10g$, suspendat de un resort elastic, execută o mişcare oscilatorie armonică descrisă de ecuaţia :

$$y = 8\sin(100\pi t - \frac{\pi}{3}) \text{ cm.}$$

Să se calculeze:

a) elementele mişcării;
b) energia totală a oscilatorului;
c) constanta elastică a resortului;
d) să se reprezinte grafic această mişcare în coordonate rectangulare.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(Bacalaureat , iunie 1978)

Rezolvare:

a) Elementele mişcării

Ecuaţia elongaţiei în mişcarea oscilatorie armonică este de forma $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, iar ecuaţia mişcării date este:

$$y = 8\sin(100\pi t - \frac{\pi}{3}) \text{ cm.}$$

Prin metoda identificării elementelor mişcării, vom obţine: $A = 8\text{cm}$,

$\omega = 100\pi$ rad. $\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$ rad.

Cunoscând ω putem afla frecvenţa oscilatorului şi perioada din relaţiile:

$$\omega = 2\pi\upsilon \rightarrow \upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50Hz \text{ şi } T = \frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{50} = 0{,}02s$$

Elementele mişcării vor fi: $A = 8\text{cm}$, $\omega = 100\pi$ rad, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$ rad.,

$\upsilon = 50Hz$, şi $T = 0{,}02s$.

b) Energia totală a oscilatorului.

Se află din relaţia :

$$E_t = \frac{m\omega^2 A}{2} = \frac{10 \bullet 10^{-3} \bullet (100\pi)^2 \bullet 8 \bullet 10^{-2}}{2} = 39{,}8j \rightarrow$$

$$\rightarrow E_t = 39{,}8j .$$

c) Valoarea constantei elastice a resortului, se află din relaţia:

$$K = m\omega^2 = 10 \bullet 10^{-3} \bullet (100\pi)^2 = 985\frac{N}{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow K = 985\frac{N}{m}.$$

d) Graficul $y = 8\sin(100\pi t - \frac{\pi}{3})$ este o sinusoidă în coordonate

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

rectangulare 0t şi 0y.

Pentru $t=0$: $y=8\sin(0-\frac{\pi}{3})=-8\sin\frac{\pi}{3}=-8\frac{\sqrt{3}}{2}=-4\sqrt{3}$ cm.

Pentru $y=0$: $0=8\sin(100\pi t-\frac{\pi}{2})$. Cum $8\neq 0$, rezultă

$$\sin(100\pi t-\frac{\pi}{3})=0\rightarrow \sin(100\pi t-\frac{\pi}{3})=\sin\pi\rightarrow$$

$$100\pi t-\frac{\pi}{3}=\pi\rightarrow 100t=1+\frac{1}{3}\rightarrow 100t=\frac{4}{3}\rightarrow t=\frac{1}{75}s.$$

Pentru $y=A=8\ \ cm$: $8=8\sin(100\pi t-\frac{\pi}{3})\rightarrow$

$$\rightarrow 1=\sin(100\pi t-\frac{\pi}{3})\rightarrow \sin\frac{\pi}{2}=\sin(100\pi t-\frac{\pi}{3})\rightarrow \frac{\pi}{2}=100\pi t-\frac{\pi}{3}\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}=100t-\frac{1}{3}\rightarrow \frac{1}{2}=100t-\frac{1}{3}\rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=100t\rightarrow \frac{5}{6}=100t\rightarrow$$

$$\rightarrow t=\frac{1}{120}s.$$

Pentru $y=-8\ \ cm$: $-8=8\sin(100\pi t-\frac{\pi}{3})\rightarrow -1=\sin(100\pi t-\frac{\pi}{3})$.

Dar $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$ şi atunci, avem: $\sin\frac{3\pi}{2}=\sin(100\pi t-\frac{\pi}{3})\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{3\pi}{2}=100\pi t-\frac{\pi}{3}\rightarrow \frac{3}{2}=100t-\frac{1}{3}\rightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{3}=100t\rightarrow \frac{11}{6}=100t\rightarrow$$

$$\rightarrow t=\frac{11}{600}s.$$

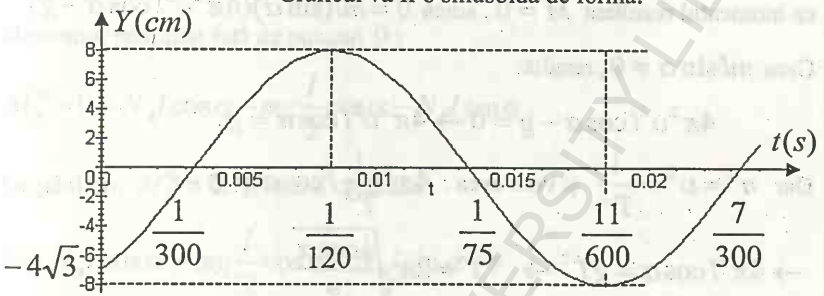
Cum $\varphi_0=\omega t_0\rightarrow t_0=\frac{\varphi_0}{\omega}=\frac{\pi}{3}\frac{1}{100\pi}=\frac{1}{300}s\rightarrow\ t_0=\frac{1}{300}s.$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tabel pentru t şi y :

t(s)	0 s	1/75 s	1/120 s	11/600 s
y(cm)	$-4\sqrt{3}$	0	8	-8

Graficul va fi o sinusoidă de forma:



79. O tijă subţire rigidă de lungime l este prinsă rigid sub un unghi α, de un ax vertical. La capătul tijei este fixa o bilă de masă m.

Sistemul se roteşte cu turaţia n. Să se calculeze:

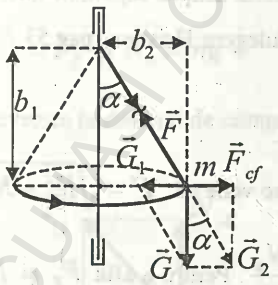
a) reacţiunea bilei asupra tijei şi momentul reacţiunii faţă de punctul de fixare de ax.

b) Pentru ce perioadă de rotaţie acest moment este nul ?

(Culegere Hristiev, pag53 / ed. 1983)

Rezolvare:

a) Reacţiunea bilei asupra tijei se notează cu F şi i se opune forţa



G_2 componentă a greutăţii G. În timpul rotaţiei avem $F = G_2$ şi momentul rezultant

$$M = -Gb_2 + F_{cf} b_1 = -mgl\sin\alpha + m\omega^2 l(\sin\alpha) l\cos\alpha$$

$$= 4\pi^2 mn^2 l^2 \sin\alpha\cos\alpha - mgl\sin\alpha$$

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

. Momentul rezultant are expresia:

$$M = ml(\sin\alpha)(4\pi^2 n^2 l^2 \cos\alpha - g).$$

b) Pentru a calcula perioada T de rotaţie a sistemului mecanic, punem condiţia ca momentul rezultant $M = 0$, adică $0 = ml(\sin\alpha)(4\pi^2 \upsilon^2 l\cos\alpha - g)$.

Cum $ml\sin\alpha \neq 0$, rezultă:

$$4\pi^2\upsilon^2 l\cos\alpha - g = 0 \rightarrow 4\pi^2\upsilon^2 l\cos\alpha = g.$$

Dar $n^2 = \upsilon^2 = \frac{1}{T^2}$ şi vom avea : $4\pi^2 \frac{1}{T^2} l\cos\alpha = g \rightarrow$

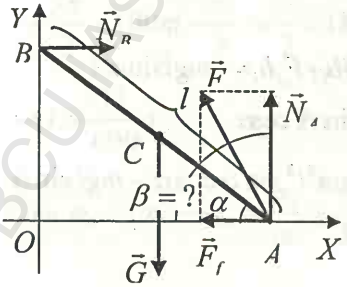
$$\rightarrow 4\pi^2 l\cos\alpha = gT^2 \rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}.$$

Relaţia pentru calcularea perioadei de rotaţie va fi : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$.

Răspunsurile cerute de problemă vor fi:

$$F = m\sqrt{g^2 + (4\pi^2 n^2 l\sin\alpha)^2} \quad \text{şi} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}.$$

80. O scară uniformă de masă m este sprijinită de un perete absolut neted (fără frecare), capătul inferior aşezat pe podea cu frecare. Unghiul de înclinare a scării faţă de orizontală este α. Ce forţă se exercită asupra capătului inferior al scării şi sub ce unghi faţă de orizontală ? (Culegere Hristiev, pag.53 / ed. 1983)



Rezolvare:

Din figură se vede că: $F = \sqrt{F_f^2 + N_A^2}$

şi $tg\beta = \frac{N_A}{F_f}$. Pentru a afla F_f şi N_A

trebuie să ne folosim de condiţiile unui solid rigid de va fi în echilibru şi de faptul că rezultanta tuturor forţelor care acţionează asupra scării : $\vec{N}_A, \vec{F}_f, \vec{G}$ şi $\vec{N}_B$ să fie nulă.

Momentul rezultant faţă de punctul 0 :

$$M_R^0 = 0 + N_A l\cos\alpha - mg\frac{l}{2}\cos\alpha - N_B l\sin\alpha .$$

La echilibru $M_R^0 = 0$ şi atunci căpătăm:

$$0 = N_A l\cos\alpha - mg\frac{l}{2}\cos\alpha - N_B l\sin\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{mg}{2}\cos\alpha + N_B\sin\alpha = N_A\cos\alpha .$$

Scriem condiţia de echilibru a forţelor:

$\vec{N}_A + \vec{F}_f + \vec{G} + \vec{N}_B = 0$. Această relaţie vectorială o proiectăm pe cele două axe: 0X şi 0Y.

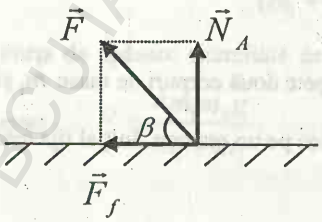
0X: $0 - F_f + 0 - N_B = 0 \rightarrow N_B = F_f$.

0Y: $N_A + 0 - mg + 0 = 0 \rightarrow N_A = mg$.

Din condiţiile de echilibru s-au obţinut: $\frac{mg}{2}\cos\alpha + N_B\sin\alpha = N_A\cos\alpha$,

$N_B = F_f$ şi $N_A = mg$.

Revenim la desenul de compunere a forţelor $\vec{N}_A, \vec{F}_f$ şi $\vec{F}$:



Din figură scriem:

$$ctg\beta = \frac{F_f}{N_A} \text{ sau } tg\beta = \frac{N_A}{F_f}.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din $\frac{mg}{2}\cos\alpha + N_B \sin\alpha = N_A \cos\alpha$, înlocuim pe $N_B = F_f$ şi $N_A = mg$

şi obţinem: $\frac{mg}{2}\cos\alpha + F_f \sin\alpha = mg\cos\alpha \rightarrow$

$$\rightarrow F_f \sin\alpha = mg\cos\alpha - \frac{mg}{2}\cos\alpha = \frac{2mg\cos\alpha - mg\cos\alpha}{2} =$$

$$= \frac{mg\cos\alpha}{2} \rightarrow \quad F_f \sin\alpha = \frac{mg\cos\alpha}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow F_f = \frac{mg}{2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{mg}{2}ctg\alpha = \frac{mg}{2tg\alpha} \rightarrow \quad F_f = \frac{mg}{2tg\alpha}.$$

Cum $tg\beta = \frac{N_A}{F_f}$ şi $N_A = mg$ iar $F_f = \frac{mg}{2tg\alpha}$, vom avea:

$$tg\beta = \frac{mg}{\frac{mg}{2tg\alpha}} = mg\frac{2tg\alpha}{mg} = 2tg\alpha \rightarrow \quad tg\beta = 2tg\alpha .$$

Dar $F = \sqrt{F_f^2 + N_A^2} = \sqrt{\frac{m^2g^2}{4tg^2\alpha} + m^2g^2} = \sqrt{m^2g^2(\frac{1}{4tg^2\alpha} + 1)} =$

$= mg\sqrt{\frac{1+4tg^2\alpha}{4tg^2\alpha}} \rightarrow F = \frac{mg}{2tg\alpha}\sqrt{1+4tg^2\alpha}$. Răspunsurile la cerinţele problemei sunt :

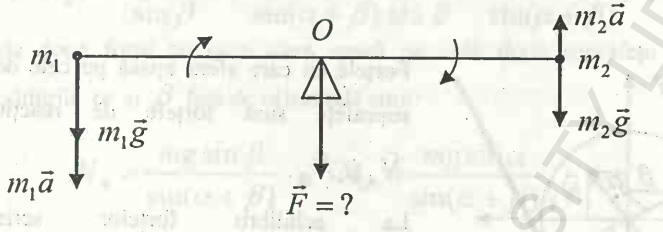
$$F = \frac{mg}{2tg\alpha}\sqrt{1+4tg^2\alpha} \quad \text{şi} \quad tg\beta = 2tg\alpha .$$

81. O tijă subţire de masă neglijabilă are la capete două corpuri de mase m_1 şi m_2 unde $m_1 > m_2$. Tija este sprijinită la mijloc pe un reazem. Iniţial tija este ţinută în poziţia orizontală, apoi se lasă liberă.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se afle apăsarea exercitată de tijă pe reazem imediat ce tija este lăsată liberă. (Culegere Hristiev, pag54, ed/1983).

Rezolvare:



Din figură se vede că $F_1 = m_1a + m_1g$ şi $F_2 = m_2g - m_2a$

Forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ sunt paralele şi de acelaşi sens încât : $F = F_1 + F_2 =$

$= m_1a + m_1g + m_2g - m_2a \rightarrow \quad F = a(m_1 - m_2) + g(m_1 + m_2)$ (1)

Cum $G_2 > G_1$, atunci :

$G_2 - G_1 = a(m_1 + m_2) \rightarrow g(m_2 - m_1) = a(m_1 + m_2) \rightarrow$

$\rightarrow a = \dfrac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \rightarrow$ acceleraţia sistemului mecanic, când tija este lăsată

liberă. Cunoscând pe $a = \dfrac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$ şi substituind în relaţia (1) obţinem :

$$F = g\frac{(m_1 - m_2)(m_2 - m_1) + m_1^2 + m_1m_2 + m_1m_2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)} =$$

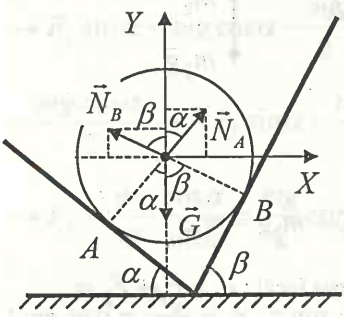
$$= g\frac{m_1m_2 - m_2^2 - m_1^2 + m_1m_2 + m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)} = g\frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

Forţa de apăsare exercitată de tijă asupra reazemului când este lăsată liberă este: $F = \dfrac{4m_1m_2g}{m_1 + m_2}$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

82. O sferă de masă m se sprijină pe două suprafețe netede, $\mu = 0$, formând cu orizontala unghiurile α și β în care $\alpha < \beta$. Să se afle forțele cu care sfera apasă pe cele două suprafețe. (Culegere Hristiev, pag.61 /ed.1983)

Rezolvare:



Forțele cu care sfera apasă pe cele două suprafețe sunt forțele de reacțiune $\vec{N}_A$ și $\vec{N}_B$.

La echilibru forțelor scriem:

$$\vec{G} + \vec{N}_A + \vec{N}_B = 0$$

Proiectăm această relație vectorială, pe axele 0X și 0Y.

0X: $0 + N_A \sin\alpha - N_B \sin\beta = 0 \rightarrow N_A \sin\alpha = N_B \sin\beta$

0Y: $-mg + N_A \cos\alpha + N_B \cos\beta = 0 \rightarrow N_A \cos\alpha + N_B \cos\beta = mg$

Avem sistemul de ecuații: $\begin{cases} N_A \sin\alpha = N_B \sin\beta \\ N_A \cos\alpha + N_B \cos\beta = mg \end{cases}$

Necunoscute sunt : N_A și N_B

Din prima ecuație din sistem : $N_B = \dfrac{N_A \sin\alpha}{\sin\beta}$ și o substituim în ecuația a doua și obținem : $N_A \cos\alpha + \dfrac{N_A \sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta = mg \rightarrow$

$$\rightarrow N_A\left(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta\right) = mg \rightarrow$$

$$\rightarrow N_A\left(\frac{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta}\right) = mg$$

Dar $\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$ și atunci:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$N_A = \frac{mg\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

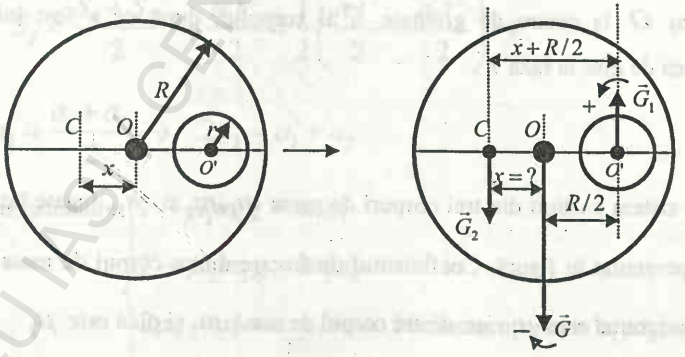
Din : $N_B = \frac{N_A \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{mg\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}\frac{\sin\alpha}{} = \frac{mg\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$

Cele două forţe cu care sfera apasă pe cele două suprafeţe înclinate cu unghiurile α şi β faţă de orizontală sunt:

$$N_A = \frac{mg\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \text{ şi } N_B = \frac{mg\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

83. Într-un disc omogen de rază R, se practică o deschidere sub forma unui cerc de rază $r << \frac{R}{2}$ conform figurii. Centrul O' al deschiderii se află la o distanţă OO' egală cu $\frac{R}{2}$ de centrul discului. Să se calculeze distanţa x de la O al discului la centrul C al corpului în funcţie de razele r şi R. (Culegere Hristiev, pag 65 /ed.1983).

Rezolvare:



$\vec{G} \rightarrow$ greutatea întregului disc de rază R

$\vec{G}_1 \rightarrow$ greutatea porţiuni de disc înlăturată

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\vec{G}_2 \rightarrow$ greutatea porţiuni de disc rămasă întreagă şi a cărui centru de greutate este în C.

Forţele $\vec{G}_1$ şi $\vec{G}$ sunt forţe paralele şi de sens contrar, iar $\vec{G}_2$ reprezintă rezultanta acestei forţe conform figurii.

Pentru a afla x scriem relaţia de bază a forţelor paralele şi de sens contrar:

$$Gx = G_1(x+\frac{R}{2}) \rightarrow mgx = m_1 g(x+\frac{R}{2}) \rightarrow V\rho gx = V_1\rho g(x+\frac{R}{2}) \rightarrow$$

$$\rightarrow Vx = V_1(x+\frac{R}{2}).$$ Dar discul are forma unui cilindru turtit şi de înălţime h, ceea ce putem scrie: $\rightarrow Shx = S_1 h(x+\frac{R}{2}) \rightarrow \pi R^2 x = \pi r^2(x+\frac{R}{2}) \rightarrow$

$$\rightarrow R^2 x = r^2(x+\frac{R}{2}) \rightarrow R^2 x = r^2 x + \frac{r^2 R}{2} \rightarrow x(R^2-r^2) = \frac{r^2 R}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{r^2 R}{2(R^2-r^2)} \rightarrow$$

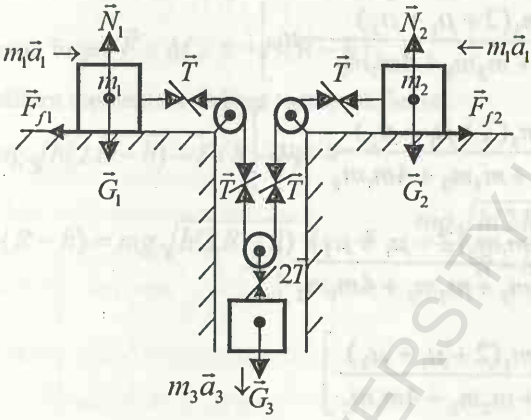
$$\rightarrow x = \frac{r^2 R}{2(R^2-r^2)},$$ reprezintă distanţa de la centru de greutate al discului notat cu O la centru de greutate C al corpului, după ce a fost înlăturat porţiunea de disc la rază r.

84. Un sistem alcătuit din trei corpuri de mase m_1, m_2 şi m_3, legate între ele, este reprezentat în figură. Coeficientul de frecare dintre corpul de masa m_1 şi planul orizontal este μ_1, iar dintre corpul de masă m_2 şi plan este μ_2.

Să se calculeze acceleraţiile a_1, a_2 şi a_3 ale corpurilor, precum şi tensiunea în fir. (Culegere Cone, pag.17)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:



Forța care pune întreg sistemul în mișcare este $\vec{G}_3$, încât fiecare corp își are accelerația sa. Aplicăm fiecărui corp legea II a dinamicii:

$$m_1: \quad T - \mu_1 m_1 g = m_1 a_1$$

$$m_2: \quad T - \mu_2 m_2 g = m_2 a_2$$

$$m_3: \quad m_3 g - 2T = m_3 a_3$$

Cum $S_3 = \dfrac{S_1 + S_2}{2} \rightarrow \dfrac{a_3 t^2}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_1 t^2}{2} + \dfrac{a_2 t^2}{2}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} \rightarrow \quad 2a_3 = a_1 + a_2$$

Avem sistemul : $\begin{cases} T - \mu_1 m_1 g = m_1 a_1 \\ T - \mu_2 m_2 g = m_2 a_2 \\ 2a_3 = a_1 + a_2 \\ m_3 g - 2T = m_3 a_3 \end{cases}$ Necunoscute sunt: a_1, a_2, a_3 și T

În urma rezolvării sistemului obținem:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$a_1 = g\left[\frac{m_2 m_3(2+\mu_1+\mu_2)}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2} - \mu_1\right];$$

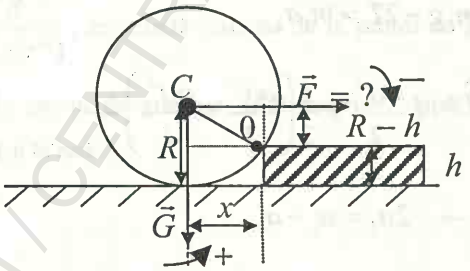
$$a_2 = g\left[\frac{m_1 m_3(2+\mu_1+\mu_2)}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2} - \mu_2\right];$$

$$a_3 = g\left[1 - \frac{2m_1 m_2(2+\mu_1+\mu_2)}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2}\right] \text{ şi}$$

$$T = g\left[\frac{m_1 m_2 m_3(2+\mu_1+\mu_2)}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2}\right]$$

85. Ce valoare minimă trebuie să aibă forţa orizontală F aplicată axului roţii, de masă m şi raza R, pentru ca roata să urce treapta (pragul) de înălţime h? (Culegere Hristiev, pag.53 /ed. 1983)

Rezolvare:



Din figură se constată că braţul forţei $\vec{F}$ este $R-h$ iar al greutăţii este x.

Aflarea lui x:

$$x^2 = R^2 - (R-h)^2 = R^2 - R^2 + 2Rh - h^2 = 2Rh - h^2 = h(2R-h) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt{h(2R-h)}\,.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- Momentul greutăţii $\vec{G}$: $M_G = Gx = mg\sqrt{h(2R-h)}$.
- Momentul forţei $\vec{F}$: $M_F = -F(R-h)$.

La echilibru momentul rezultant trebuie să fie nul:

$$0 = mg\sqrt{h(2R-h)} - F(R-h) \rightarrow$$

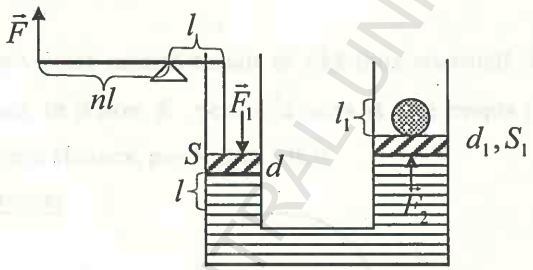
$$\rightarrow F(R-h) = mg\sqrt{h(2R-h)} \rightarrow \quad F = \frac{mg\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

MECANICA FLUIDELOR
STATICA ŞI DINAMICA

86. Să se calculeze lucrul mecanic consumat pentru a ridica pistonul mare al unei prese hidraulice pe distanța l_1, dacă raportul diametrelor pistoanelor este $\frac{d_1}{d}$, iar pistonul mic este acționat de o pârghie la care unul din brațe este de n ori mai mare decât celălalt. Forța care acționează brațul mare este F, iar randamentul presei hidraulice este η. (Culegere Hristiev, pag.67 / ed. 1983)

Rezolvare:



Randamentul mecanic: $\eta = \frac{L_u}{L_c}$ unde $L_c = \frac{L_u}{\eta} = \frac{F_2 l_1}{\eta}$.

Cum : $\frac{F_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{F_2}{\frac{\pi d_1^2}{4}} \rightarrow \frac{F_1}{d^2} = \frac{F_2}{d_1^2} \rightarrow F_2 = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 F_1$ (1)

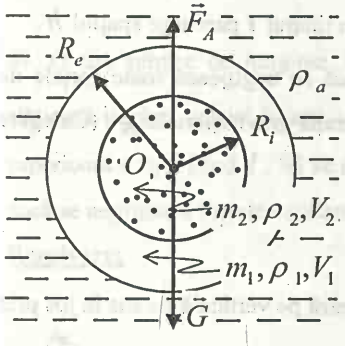
La pârghie avem relația de echilibru: $nlF = F_1 l \rightarrow F_1 = nF$, pe care o introducem în relația (1): $F_2 = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 nF$ şi apoi o substituim în $L_c = \frac{F_2 l_1}{\eta} = \frac{l_1}{\eta}\left(\frac{d_1}{d}\right)^2 nF$. Mărimea fizică cerută în problemă este :

$$L_c = \frac{l_1}{\eta}\left(\frac{d_1}{d}\right)^2 nF.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

87. Un corp de formă sferică, cu densitatea ρ_1, gol pe dinăuntru , are raza interioară R_i şi raza exterioară R_e. Ce valoare trebuie să aibă densitatea materialului ρ_2, cu care se umple corpul sferic pentru ca acesta să plutească în interiorul lichidului ? (Culegere Hristiev, pag.68 /ed. 1983)

Rezolvare:



Din figură se vede că:

$V = V_1 + V_2 \rightarrow V_1 = V - V_2 =$

$\frac{4\pi}{3}R_e^3 - \frac{4\pi}{3}R_i^3 = \frac{4\pi}{3}(R_e^3 - R_i^3)$

Condiţia de plutire a sistemului mecanic:

$G = F_A$, unde $G = m_1 g + m_2 g =$

$= (m_1 + m_2)g$. Dar $F_A = G_l = m_l g$ şi

introducând pe G şi F_A în condiţia de plutire, avem:

$(m_1 + m_2)g = m_l g \rightarrow m_1 + m_2 = m_l$.

Însă : $m_l = m_1 + m_2 = V_1\rho_1 + V_2\rho_2 \rightarrow V\rho_a = V_1\rho_1 + V_2\rho_2$ (1).

Cum $V_1 = \frac{4\pi}{3}(R_e^3 - R_i^3)$, $V_2 = \frac{4\pi}{3}R_i^3\rho_2$ şi $V = \frac{4\pi}{3}R_e^3\rho_2$, pe care le

substituim în (1), obţinem: $\frac{4\pi}{3}R_e^3\rho_a = \frac{4\pi}{3}(R_e^3 - R_i^3)\rho_1 + \frac{4\pi}{3}R_i^3\rho_2 \rightarrow$

$\rightarrow R_e^3\rho_a = (R_e^3 - R_i^3)\rho_1 + R_i^3\rho_2 \rightarrow R_e^3\rho_a = R_e^3\rho_1 - R_i^3\rho_1 + R_i^3\rho_2 \rightarrow$

$\rightarrow \left(\frac{R_e}{R_i}\right)^3\rho_a = \left(\frac{R_e}{R_i}\right)^3\rho_1 - \rho_1 + \rho_2 \rightarrow$

$\left(\frac{R_e}{R_i}\right)^3\rho_a - \left(\frac{R_e}{R_i}\right)^3\rho_1 + \rho_1 = \rho_2 \rightarrow \rho_2 = \left(\frac{R_e}{R_i}\right)^3(\rho_a - \rho_1) + \rho_1$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

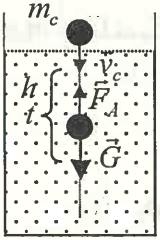
Densitatea lichidului cu care se umple locul gol al corpului sferic este:

$$\rho_2 = \left(\frac{R_e}{R_i}\right)^3 (\rho_a - \rho_1) + \rho_1 .$$

88. Un corp aflat deasupra unui bazin cu apă este aruncat pe verticală, în jos cu viteza v_0. Pătrunzând în apă, se constată că în timpul t parcurge spaţiul h.

Să se determine densitatea corpului, dacă se neglijează toate forţele de frecare (în aer şi în apă) şi se cunoaşte acceleraţia gravitaţională g. (Culegere Hristiev, pag.61 /ed. 1983)

Rezolvare:



Întrucât corpul se deplasează pe verticală de sus în jos prin apă, rezultă că $G_c > F_A$, încât putem scrie :

$G_c - F_A = m_c a$ (legea II -a a dinamicii)

$m_c g - m_l g = m_c a \rightarrow V_c \rho_c g - V_l \rho_a g = V_c \rho_c a \rightarrow$

$\rightarrow g(\rho_c - \rho_a) = \rho_c a$ (1)

Corpul are prin apă o mişcare uniform variată, încât ecuaţia mişcării va fi : $h = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Din această relaţie: $a = \frac{2h}{t^2} - \frac{2v_0}{t}$ şi substituim în relaţia (1): $g(\rho_c - \rho_a) = \rho_c(\frac{2h}{t^2} - \frac{2v_0}{t}) \rightarrow g(\rho_c - \rho_a) = 2\rho_c(\frac{h}{t^2} - \frac{v_0}{t}) \rightarrow$

$$\rightarrow g(\rho_c - \rho_a) = 2\rho_c\left(\frac{h - v_0 t}{t^2}\right) \rightarrow \rho_c - \rho_a = \frac{2\rho_c}{gt^2}(h - v_0 t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho_c - \frac{2\rho_c}{gt^2}(h - v_0 t) = \rho_a \rightarrow \rho_c\left[1 - \frac{2(h - v_0 t)}{gt^2}\right] = \rho_a \rightarrow$$

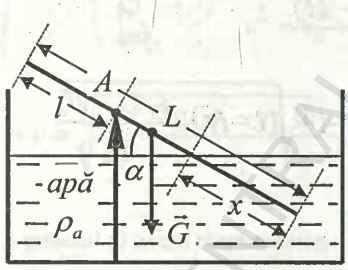
BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

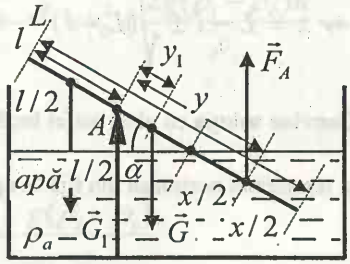
$$\rightarrow \rho_c\left[\frac{gt^2-2(h-v_0t)}{gt^2}\right]=\rho_a \rightarrow \rho_c=\frac{\rho_a gt^2}{gt^2-2(h-v_0t)}$$

Densitatea corpului, aruncat din imediata apropiere de suprafaţa apei pe verticală de sus în jos cu viteza v_0 este: $\rho_c=\frac{\rho_a gt^2}{gt^2-2(h-v_0t)}$.

89. O tijă subţire de lungime L şi densitatea ρ este sprijinită ca în figura alăturată intrând parţial în apă, distanţa de la punctul de sprijin A, la partea superioară a tijei fiind l. Să se determine cât din lungimea tijei se află în apă, dacă se neglijează forţele capilare. (Culegere Hristiev, pag.69 /ed.1983)

Rezolvare:





Din figură se vede: braţul forţei $\vec{G}_1: \frac{l}{2}\cos\alpha$

: braţul forţei $\vec{G}: y_1\cos\alpha$ unde $y_1=\frac{L}{2}-l$

: braţul forţei $\vec{F}_A: \left(y+\frac{x}{2}\right)\cos\alpha$ unde $L=l+y+x \rightarrow$

$\rightarrow y=L-l-x$

La echilibru momentul rezultant trebuie să fie nul:

$$0=G_1\frac{l}{2}\cos\alpha-G\left(\frac{L}{2}-l\right)\cos\alpha+F_A\left(y+\frac{x}{2}\right)\cos\alpha \rightarrow$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow 0 = m_1 g\frac{l}{2} - mg\left(\frac{L}{2} - l\right) + m_l g\left(L - l - x + \frac{x}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = V_1\rho\frac{l}{2} - V\rho\left(\frac{L}{2} - l\right) + V_l\rho_a\left(\frac{2L - 2l - 2x + x}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = Sl\rho l - SL\rho(L - 2l) + Sx\rho_a(2L - 2l - x) \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = \rho l^2 - \rho L(L - 2l) + x\rho_a 2L - x\rho_a 2l - \rho_a x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = \rho l^2 - \rho L(L - 2l) + 2x\rho_a(L - l) - \rho_a x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho_a x^2 - 2x\rho_a(L - l) + \rho L(L - 2l) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{\rho_a(L - l) \pm \sqrt{\rho^2{}_a(L - l)^2 - \rho_a L\rho(L - 2l)}}{\rho_a} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{\rho_a(L - l)}{\rho_a} \pm \sqrt{\frac{\rho^2{}_a(L - l)^2}{\rho^2{}_a} - \frac{\rho_a L\rho(L - 2l)}{\rho^2{}_a}} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = L - l \pm \sqrt{(L - l)^2 - \frac{L\rho(L - 2l)}{\rho_a}}$$

Convine soluţia cu plus, astfel încât : $x = L - l + \sqrt{(L - l)^2 - \frac{L\rho(L - 2l)}{\rho_a}}$

şi reprezintă porţiunea din tijă în apă.

90. O sferă cu volumul V de densitate ρ_c se află la adâncimea h a unui lichid de densitate ρ_l şi se imprimă de jos în sus pe verticală o viteză v_0. Să se afle :

a) Acceleraţia cu care sfera se ridică spre suprafaţa lichidului şi viteza v cu care iese din lichid.

b) Timpul care-l face sfera până la ieşirea din lichid şi înălţimea maximă la care se ridică sfera în aer.

c) Lăsată liber de la înălţimea maximă atinsă în aer, sfera intră din nou în lichid şi se cere să se calculeze la ce adâncime va ajunge sfera în lichid.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

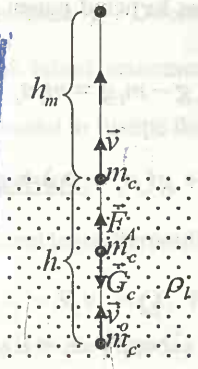
Toate frecările sunt neglijabile, densitatea lichidului $\rho_l > \rho_c$ iar accelerația gravitațională se cunoaște.

Rezolvare:

a) Cum $F_A > G_c$ scriem: $F_A - G_c = m_c a_u \rightarrow G_l - G_c = m_c a_u \rightarrow$

$\rightarrow m_l g - m_c g = V_c \rho_c a_u \rightarrow V_l \rho_l g - V_c \rho_c g = V_c \rho_c a_u \rightarrow$

Cum $V_l = V_c$ obținem: $g(\rho_l - \rho_c) = \rho_c a_u \rightarrow$



$$\rightarrow a_u = \frac{g(\rho_l - \rho_c)}{\rho_c}.$$

Întrucât $\rho_l > \rho_c$, rezultă că $a_u > 0$, iar mișcarea corpului prin lichid pe verticală de jos în sus, este uniform accelerată. Aflarea vitezei v la ieșirea din lichid se poate cu ajutorul relației Galileo-Galilei:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_u h \rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + \frac{2g(\rho_l - \rho_c)h}{\rho_c} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2g(\rho_l - \rho_c)h}{\rho_c}}$$

La punctul a) avem răspunsurile:

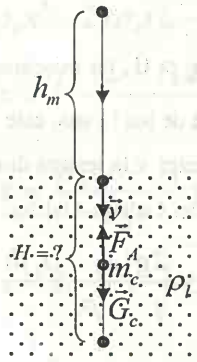
$$\begin{cases} a_u = \dfrac{g(\rho_l - \rho_c)}{\rho_c} \\ v = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{2g(\rho_l - \rho_c)h}{\rho_c}} \end{cases}$$

b) Știind $v = v_0 + a_u t_1 \rightarrow t_1 = \dfrac{v - v_0}{a}$. De la punctul (a) se cunosc v și a_u și vom putea afla timpul t_1, cât face corpul până la ieșirea din lichid. După ieșirea corpului din lichid cu viteza v, vom avea în continuare o mișcare uniform încetinită, în câmpul gravitațional al Pământului, cu accelerația g, după care după un anumit timp se va opri.

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI
F I Z I C Ă
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

La aflarea înălțimii maxime h_m ne folosim de relația Galileo-Galilei: $0 = v^2 - 2gh_m \rightarrow \quad h_m = \frac{v^2}{2g}$. Cunoscându-se v, de la punctul (a), putem calcula înălțimea maximă h_m.

c) Sfera atingând înălțimea maximă h_m, revine la suprafața lichidului în mișcare uniform accelerată, cu accelerația gravitațională g și având la intrarea în lichid aceiași viteză v, cu care a părăsit suprafața lichidului când se deplasa prin lichid de jos în sus. La intrarea în lichid putem afla



accelerația la coborâre:

$$G_c - F_A = m_c a_c \rightarrow m_c g - m_l g = m_c a_c \rightarrow$$

$$V_c \rho_c g - V_l \rho_l g = V_c \rho_c a_c \rightarrow g(\rho_c - \rho_l) = \rho_c a_c \rightarrow$$

$$a_c = \frac{g(\rho_c - \rho_l)}{\rho_c}.$$

Cum $\rho_l > \rho_c$, accelerația la coborâre $a_c < 0$ și ca atare deplasarea corpului prin lichid se va face uniform încetinit și va opri la adâncimea H. Aflarea adâncimii H se poate calcula din relația Galileo-Galilei: $0 = v^2 + 2a_c H \rightarrow$

$H = \frac{-v^2}{2a_c}$. Substituim pe $v^2 = v_0^2 + \frac{2g(\rho_l - \rho_c)h}{\rho_c}$ în $H = \frac{-v^2}{2a_c} \rightarrow$

$$\rightarrow H = -\frac{v_0^2 + \frac{2g(\rho_l - \rho_c)h}{\rho_c}}{\frac{2g(\rho_l - \rho_c)}{\rho_c}} = \frac{\frac{\rho_c v_0^2 + 2g(\rho_l - \rho_c)h}{\rho_c}}{\frac{2g(\rho_l - \rho_c)}{\rho_c}} =$$

$$= \frac{\rho_c v_0^2 + 2g(\rho_l - \rho_c)h}{2g(\rho_l - \rho_c)} = \frac{\rho_c v_0^2}{2g(\rho_l - \rho_c)} + h \rightarrow \quad H = h + \frac{\rho_c v_0^2}{2g(\rho_l - \rho_c)}.$$

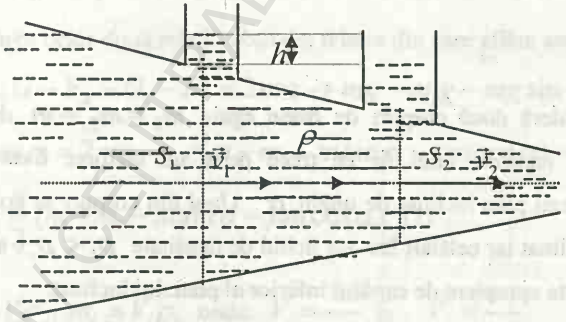
BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Adâncimea H la care ajunge corpul în lichid este $H = h + \frac{\rho_c v_0^2}{2g(\rho_l - \rho_c)}$.

91. Un tub orizontal de o anumită formă, de secţiuni S_1 şi S_2 prevăzut cu două manometre ce măsoară presiunile statice p_1 şi p_2 ale unui lichid în curgere cu densitatea ρ. Diferenţa de nivel între înălţimea coloanelor de lichid în cele două tuburi manometrice este h. Se cere debitul Q al lichidului prin tubul orizontal în funcţie de mărimile h, S_1, S_3 şi g.

Rezolvare:

Scriem legea Bernoulli: $p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2}$ şi ecuaţia de continuitate: $S_1 v_1 = S_2 v_2 = Q$. Pentru a afla Q avem nevoie de v_1 sau v_2, căci secţiunile transversale S_1 şi S_2 se cunosc.



Din legea Bernoulli avem: $p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$ dar $p_1 - p_2 = \rho g h$,

încât: $2\rho g h = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) \rightarrow \quad 2gh = (v_2^2 - v_1^2)$ şi împreună cu $S_1 v_1 = S_2 v_2$ formează un sistem:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} 2gh = (v_2^2 - v_1^2) & \text{necunoscute sunt : } v_1 \text{ și } v_2 \\ S_1 v_1 = S_2 v_2 \end{cases}$$

Din a doua ecuație $v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$ și substituim în prima ecuație , obținem :

$$2gh = (\frac{S_1^2 v_1^2}{S_2^2} - v_1^2) \rightarrow 2gh = v_1^2(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1) = v_1^2\left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_1^2 = \frac{2ghS_2^2}{S_1^2 - S_2^2} \rightarrow v_1 = S_2\sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}} \quad \text{unde}$$

v_1 este viteza lichidului prin S_1 încât se poate afla debitul de lichid;

$$Q = v_1 S_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}} .$$

Mărimea fizică cerută în problemă, are formula: $Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}$

Cunoscându-se S_1, S_2, g și h se poate afla debitul lichidului în curgere staționară.

92. Se consideră două corpuri de mase egale $m_1 = m_2 = m$ de densitate ρ_c legate la capetele unui fir ce trece peste un scripete fixat la puntea superioară a uni plan înclinat de unghi α. Unul din corpuri se poate deplasa pe planul înclinat iar celălalt într-un lichid de densitate $\rho_l < \rho_c$, aflat într-un vas în imediata apropiere de capătul inferior al planului înclinat.

Coeficientul de frecare dintre corpul care urcă pe planul înclinat este μ, iar cel de al doilea ce se deplasează pe verticală de sus în jos și nu întâmpină frecare din partea lichidului. Se cer:

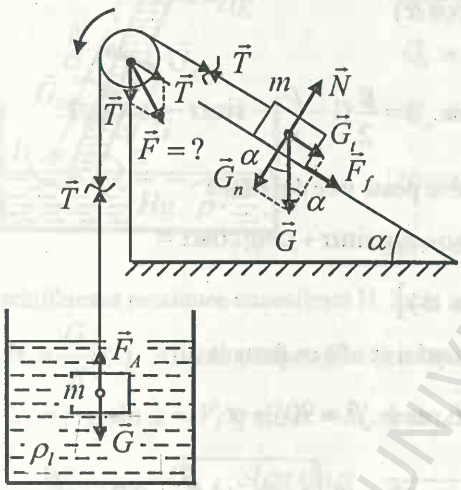
a) accelerația sistemului mecanic;

b) tensiunea în fir în timpul mișcării;

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) forţa de apăsare pe axul scripetelui fix, aşezat la partea superioare a planului înclinat.

Rezolvare:



a) Întrucât în problemă este indicat faptul că mişcarea corpului în lichid se face pe verticală de sus în jos iar forţa motoare va fi greutatea corpului, ce se deplasează în vasul cu lichid şi pe baza legii a II a dinamicii putem scrie : $G - F_A - T = ma$, pentru corpul ce se deplasează în lichid şi $T - G_t - F_f = ma$, pentru corpul ce se deplasează pe planul înclinat .

Prin adunarea celor două relaţii, obţinem relaţia din care aflăm acceleraţia sistemului: $G - F_A - G_t - F_f = 2ma \rightarrow mg - m_l g - mg\sin\alpha -$

$- \mu mg\cos\alpha = 2ma \rightarrow g(m - m_l - m\sin\alpha - \mu m\cos\alpha) = 2ma \rightarrow$

$\rightarrow ma = \frac{g}{2}(m - m_l - m\sin\alpha - \mu m\cos\alpha)$ (1) .

Dar $m = V\rho_c$, $m_l = V_l\rho_l$ unde: $V = \frac{m}{\rho_c}$ şi $V_l = \frac{m_l}{\rho_l}$.

Cum: $V = V_l$, atunci: $\frac{m}{\rho_c} = \frac{m_l}{\rho_l} \rightarrow m_l = \frac{m\rho_l}{\rho_c}$.

Substituim $m_l = \frac{m\rho_l}{\rho_c}$ în relaţia (1) şi obţinem:

BCU "AS I CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow ma = \frac{g}{2}(m - \frac{m\rho_l}{\rho_c} - m\sin\alpha - \mu m\cos\alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{g}{2}(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c} - \sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Accelerația sistemului mecanic este: $a = \frac{g}{2}(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c} - \sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

b) Calcularea tensiunii mecanice se poate face din relația :

$$T - G_t - F_f = ma \rightarrow T = ma + mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha =$$

$$= m[a + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]$$

c) Forța de apăsare pe axul scripetelui se află cu formula :

$$F = \sqrt{T^2 + T^2 + 2T^2\cos\beta}, \text{ unde } \beta = 90^o - \alpha$$

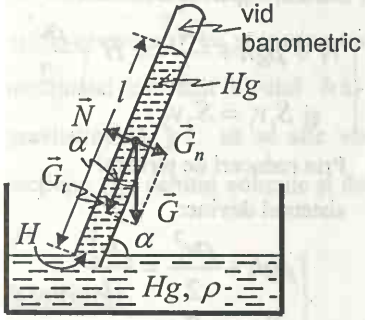
$$F = T\sqrt{2 + 2\cos\beta} = T\sqrt{2(1 + \cos\beta)} = T\sqrt{2 \bullet 2\cos^2\frac{\beta}{2}} = 2T\cos\frac{\beta}{2}.$$

Forța de apăsare pe axul scripetelui este: $F = 2T\cos\frac{\beta}{2}$.

93. Se consideră un tub de sticlă, tip Torricelli, îl umplem cu mercur, se astupă la capătul deschis şi astfel, se roteşte la 180^0, şi-l introducem într-un vas tot cu mercur, la o înclinare de un unghi α. Apoi , se înlătură mijlocul de astupare a tubului şi se va constata că mercurul se va stabili la o anumită lungime l din tub şi care poate fi citită cu precizie.

Cunoscându-se densitatea mercurului, unghiul α, lungimea coloanei de mercur, precum şi accelerația gravitațională, să se stabilească o relație dintre aceste mărimi fizice, pentru determinarea presiunii atmosferice.

BOUMRT CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Rezolvare:

Greutatea coloanei de mercur se descompune în componentele $\vec{G}_t$ şi $\vec{G}_n$:

$G_t = mg\sin\alpha$ şi

$G_n = mg\cos\alpha$

Numai componenta $\vec{G}_t$ produce o presiune: $p = \frac{G_t}{S}$ şi această presiune echilibrează presiunea atmosferică H, încât la echilibru putem scrie:

$H = \frac{G_t}{S}$ (1). Aflarea componentei greutăţii coloane de mercur G_t:

$G_t = mg\sin\alpha = V\rho g\sin\alpha = Sl\rho g\sin\alpha$. Substituim valoarea lui G_t în:

$$H = \frac{G_t}{S} = \frac{Sl\rho g\sin\alpha}{S} = l\rho g\sin\alpha.$$

Relaţia cerută în această problemă experiment este: $H = l\rho g\sin\alpha$.

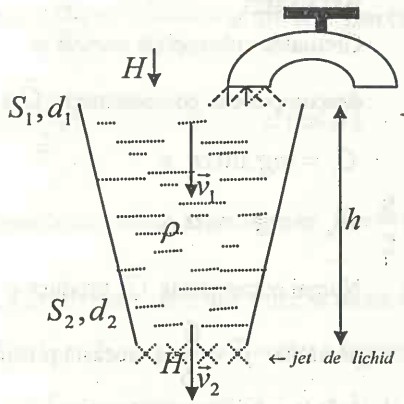
94. O pâlnie are diametrul mare d_1 şi diametrul mic d_2 iar înălţimea h. Se orientează vertical, cu deschiderea mare în sus iar cea mică în jos şi prin care curge (staţionar) un lichid de densitate ρ cunoscută.

Să se calculeze : viteza cu care părăseşte lichidul pâlnia, debitul de volum şi cel de masă. Se neglijează frecările, iar nivelul lichidului din pâlnie este mereu constant, în curgerea staţionară a lichidului.

Rezolvare:

Pentru a afla viteza v_2 şi cele două debite de volum şi de masă, ne folosim de legea Bernoulli şi legea de continuitate, scrise la intrarea lichidului prin secţiunea S_1 cu viteza v_1 şi la ieşire cu viteza v_2, necunoscută.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Scriem legea lui Bernoulli:

$$\begin{cases} H+\rho gh+\dfrac{\rho v_1^2}{2}=H+\dfrac{\rho v_2^2}{2} \\ \text{şi } S_1v_1=S_2v_2 \end{cases}$$

Prin reduceri de termeni sistemul devine:

$$\begin{cases} \rho gh+\dfrac{\rho v_1^2}{2}=\dfrac{\rho v_2^2}{2} \\ S_1v_1=S_2v_2 \end{cases}$$

Prima ecuație din sistem este:

$\frac{1}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right)=gh \rightarrow v_2^2-v_1^2=2gh$, iar din ecuația a doua

$v_1=\frac{S_2v_2}{S_1}$ şi substituind în $v_2^2-v_1^2=2gh$, obținem:

$$v_2^2-\frac{S_2^2v_2^2}{S_1^2}=2gh \rightarrow v_2^2\left(1-\frac{S_2^2}{S_1^2}\right)=2gh \rightarrow$$

$$\rightarrow v_2=\sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{S_2^2}{S_1^2}}}=\sqrt{\frac{2ghS_1^2}{S_1^2-S_2^2}}=S_1\sqrt{\frac{2gh}{S_1^2-S_2^2}}=\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2gh}{\frac{\pi^2d_1^4}{16}-\frac{\pi^2d_2^4}{16}}}=$$

$$=\frac{\pi d_1^2}{4}\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2gh}{d_1^4-d_2^4}}=d_1^2\sqrt{\frac{2gh}{d_1^4-d_2^4}}.$$

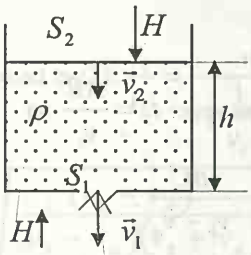
Viteza de ieşire a lichidului prin S_2 va fi : $v_2=d_1^2\sqrt{\frac{2gh}{d_1^4-d_2^4}}$, debitul volumic $Q_v=S_2v_2=\frac{\pi d_2^2d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2gh}{d_1^4-d_2^4}}$ şi

debitul de masă: $Q_m=\rho Q_v=\rho\frac{\pi d_2^2d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2gh}{d_1^4-d_2^4}}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

95. Se consideră un vas cilindric, prevăzut cu un orificiu de secţiune S_1 foarte mică, comparativ cu secţiunea transversală S_2 a vasului. Neglijând frecarea, menţinând constant nivelul h al lichidului din vas, cunoscând acceleraţia gravitaţională g, să se afle viteza cu care trece lichidul prin orificiu de secţiune S_1, debitul volumic şi debitul de masă dacă densitatea lichidului este ρ.

Rezolvare:



Aplicăm legea Bernoulli: $H+\rho\frac{v_2^2}{2}+\rho gh=H+\rho\frac{v_1^2}{2}$ şi legea de continuitate: $S_2v_2=S_1v_1$.

Din $S_2v_2=S_1v_1$ scoatem $v_2=\frac{S_1v_1}{S_2}$ şi introducem în ecuaţia legii lui Bernoulli:

$$\frac{\rho}{2}\frac{S_1^2v_1^2}{S_2^2}+\rho gh=\frac{\rho v_1^2}{2}\rightarrow\quad gh=\frac{v_1^2}{2}-\frac{S_1^2v_1^2}{2S_2^2}\rightarrow 2gh=v_1^2\left(1-\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{S_1^2}{S_2^2}}}.$$ Cum $S_1<<S_2$, atunci $\frac{S_1^2}{S_2^2}\rightarrow 0$, încât $v_1=\sqrt{2gh}$

Debitul volumic $Q_v=S_1v_1=S_1\sqrt{2gh}$ şi

debitul de masă $Q_m=\rho Q_v=\rho S_1\sqrt{2gh}$

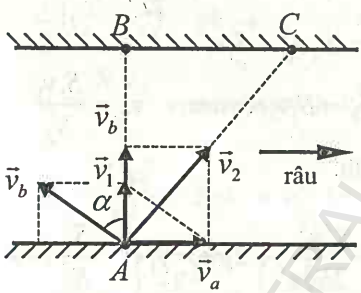
Rezultatele problemei vor fi:

$$\begin{cases} v_1=\sqrt{2gh} \\ Q_v=S_1v_1=S_1\sqrt{2gh} \\ Q_m=\rho Q_v=\rho S_1\sqrt{2gh} \end{cases}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

96. Doi pescari trebuie să treacă peste un râu exact în punctul opus. Amândoi vâslesc cu aceiaşi viteză $v_b = 2m/s$ faţă de apă, iar viteza apei este peste tot $v_a = 1{,}2m/s$. Primul orientează barca încât înaintează rectiliniu şi ajunge exact în punctul opus într-un timp t_1. Celălalt orientează barca perpendicular pe ţărm, ajunge lângă celălalt mal, apoi vâsleşte de-a lungul acestui mal până ajunge în acelaşi punct final în timpul t_2. Care este raportul $\frac{t_1}{t_2} = ?$ (Fizica clasa IX , pag.239/1993).

Rezolvare:



Din figură se vede: $t_1 = \frac{AB}{v_1}$ iar $t_2 = \frac{AC}{v_a} - \frac{BC}{v_b - v_a}$.

Facem raportul dintre t_1 şi t_2 :

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{AB}{v_1}}{\frac{AC}{v_a} - \frac{BC}{v_b - v_a}} \quad (1).$$

Din asemănarea triunghiurilor avem: $\frac{BC}{v_a} = \frac{AB}{v_b} = \frac{AC}{v_2} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{AC}{v_2} = \frac{AB}{v_b} \rightarrow BC = \frac{v_a AB}{v_b}$. Substituim în relaţia (1) şi avem :

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{AB}{v_1}}{\frac{AB}{v_1} + \frac{v_a AB}{v_b(v_b - v_a)}} = \frac{\frac{1}{v_1}}{\frac{1}{v_a} + \frac{v_a}{v_b(v_b - v_a)}} =$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= \frac{\dfrac{1}{v_b \cos\alpha}}{\dfrac{1}{v_b} + \dfrac{v_a}{v_b(v_b - v_a)}} = \frac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{1 + \dfrac{v_a}{v_b - v_a}} = \frac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\dfrac{v_b - v_a + v_a}{v_b - v_a}} =$$

$$= \frac{v_b - v_a}{v_b \cos\alpha} \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{v_b - v_a}{v_b \cos\alpha} \quad (2)$$

Dar, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{v_b^2}} = \sqrt{\frac{v_b^2 - v_a^2}{v_b^2}} = \frac{1}{v_b}\sqrt{v_b^2 - v_a^2}$ şi

înlocuind în (2): $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_b - v_a}{v_b \frac{1}{v_b}\sqrt{v_b^2 - v_a^2}} = \frac{v_b - v_a}{\sqrt{v_b^2 - v_a^2}} = \frac{\sqrt{(v_b - v_a)^2}}{\sqrt{v_b^2 - v_a^2}} =$

$$= \sqrt{\frac{(v_b - v_a)^2}{(v_b - v_a)(v_b + v_a)}} = \sqrt{\frac{v_b - v_a}{v_b + v_a}}$$

Raportul $\frac{t_1}{t_2}$ are expresia: $\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{v_b - v_a}{v_b + v_a}}$.

Numeric: $\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{2 - 1{,}2}{2 + 1{,}2}} = \sqrt{\frac{0{,}8}{3{,}2}} = \sqrt{\frac{8}{32}} = \frac{1}{2} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2}$$

Răspunsul la problemă este : $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

97. Un vagon încărcat cu nisip este acţionat în lungul unui plan orizontal de o forţă constantă $\vec{F}$ care are aceeaşi orientare cu vectorul vitezei. Printr-un orificiu aflat pe fundul căruciorului se scurge nisip cu debit constant μ.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Determinați accelerația și viteza căruciorului la momentul t dacă la momentul $t = 0$ masa era m_0 și viteza nulă. Se neglijează frecările. (Fizica cl. XII, pag.127/1979)

Rezolvare:

a) Plecăm de la formula debitului $\mu = \frac{m_o - m}{t} \rightarrow \quad \mu t = m_o - m \rightarrow$

$\rightarrow m = m_o - \mu t \quad (1)$.

Scriem formula forței: $\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (2).

În relația (2) substituim relația (1) și avem : $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_o - \mu t}$.

b) Știm că $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ sau $d\vec{v} = \vec{a}dt = \frac{\vec{F}}{m_o - \mu t}dt = -\frac{\vec{F}}{\mu}\frac{d(m_o - \mu t)}{m_o - \mu t} =$

$= -\frac{\vec{F}}{\mu} d\ln(m_o - \mu t) \rightarrow \vec{v} = \int -\frac{\vec{F}}{\mu} d\ln(m_o - \mu t) = -\frac{\vec{F}}{\mu}\ln(m_o - \mu t) + \vec{C}$ (3)

Pentru $t = 0$, rezultă $\vec{v} = 0$ și atunci:

$0 = -\frac{\vec{F}}{\mu}\ln m_o + \vec{C} \rightarrow \quad \vec{C} = \frac{\vec{F}}{\mu}\ln m_o$. Introducem pe $\vec{C} = \frac{\vec{F}}{\mu}\ln m_o$ în (3) și

găsim: $\vec{v} = -\frac{\vec{F}}{\mu}\ln(m_o - \mu t) + \frac{\vec{F}}{\mu}\ln m_o = \frac{\vec{F}}{\mu}\left[(\ln m_o - \ln(m_o - \mu t))\right] =$

$= \frac{\vec{F}}{\mu}\ln\frac{m_o}{m_o - \mu t}$. Deci rezultatele problemei sunt:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_o - \mu t} \quad \text{și} \quad \vec{v} = \frac{\vec{F}}{\mu}\ln\frac{m_o}{m_o - \mu t}$$

98. Arătați că variația energiei cinetice ΔE_c a două corpuri ce se ciocnesc plastic, depinde de masa lor și de viteza relativă înainte de ciocnire.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:

Notăm cu m_1, m_2 şi v_1, v_2 masele şi vitezele corpurilor înainte de ciocnirea lor plastică şi scriem legea conservării energiei :

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_1+m_2}{2}v^2+\Delta E_C \rightarrow$$

$$\Delta E_C=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}-\frac{m_1+m_2}{2}v^2 \quad (1) \text{ Cum } v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} \text{ şi}$$

substituind în relaţia (1) obţinem :

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}-\frac{m_1+m_2}{2}\left(\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)^2=\Delta E_C \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta E_C=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}-\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{2(m_1+m_2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta E_C=\frac{1}{2}\left[m_1v_1^2+m_2v_2^2-\frac{m_1^2v_1^2+2m_1v_1m_2v_2+m_2^2v_2^2}{2(m_1+m_2)}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta E_C=\frac{1}{2}\left[\frac{m_1^2v_1^2+m_1m_2v_1^2+m_1m_2v_2^2+m_2^2v_2^2-m_1^2v_1^2-2m_1v_1m_2v_2-m_2^2v_2^2}{m_1+m_2}\right]=$$

$$=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\right)=\frac{m_1m_2(v_1-v_2)^2}{2(m_1+m_2)}$$

unde $v_1-v_2=v_r$, viteza relativă a corpurilor înainte de ciocnirea lor plastică, iar $\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}=m_r$, masă redusă şi atunci, $\Delta E_C=\frac{m_rv_r^2}{2} \rightarrow$

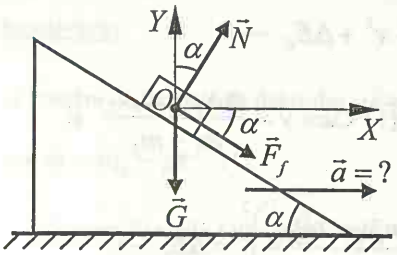
$$\rightarrow \Delta E_C=\frac{m_rv_r^2}{2}.$$

99. Cu ce acceleraţie orizontală minimă trebuie împins un plan înclinat de unghi $\alpha=45^o$ pentru ca un corp aşezat pe el să înceapă să urce pe plan. Coeficientul de frecare dintre corp şi lanul înclinat este $\mu=0,2$. (Fizică cl. IX, pag.91 / 1993).

Rezolvare:

Varianta I. (metoda proiecţiilor forţelor)

Scriem la echilibru relaţia vectorială, a forţelor : $\vec{F}+\vec{G}+\vec{F}_f+\vec{N}=0$ şi o proiectăm după 0X ŞI 0Y şi obţinem : $-F+0+F_f\cos\alpha+N\sin\alpha=0$ şi



$$0-G-F_f\sin\alpha+N\cos\alpha=0$$

S-a găsit sistemul :

$$\begin{cases} F_f\cos\alpha+N\sin\alpha=F \\ N\cos\alpha-F_f\sin\alpha=mg \end{cases}$$

Cum $F_f=\mu N$ iar $F=ma$, atunci, avem:

$$\begin{cases} \mu N\cos\alpha+N\sin\alpha=ma \\ N\cos\alpha-F_f\sin\alpha=mg \end{cases}$$ si făcând raportul ecuaţiilor, obţinem:

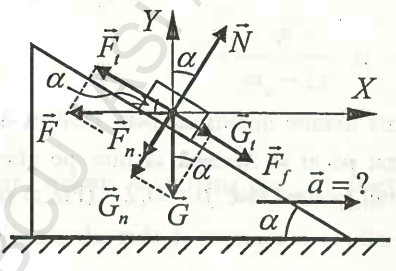
$$\frac{N(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)}{N(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}=\frac{a}{g}\rightarrow\frac{\mu\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}=\frac{a}{g}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{(\cos\alpha)\left(\mu+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{(\cos\alpha)\left(1-\mu\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}=\frac{a}{g}\rightarrow\qquad\frac{\mu+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\mu\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{a}{g}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{a}{g}=\frac{\mu+tg\alpha}{1-\mu tg\alpha}\rightarrow\qquad\rightarrow a=g\frac{\mu+tg\alpha}{1-\mu tg\alpha}$$

Numeric: $\rightarrow a=9{,}8\dfrac{0{,}2+1}{1-0{,}2}=9{,}8\dfrac{1{,}2}{0{,}8}=14{,}7$ m/s^2

Acceleraţia cu care trebuie împins planul înclinat încât corpul să înceapă să se deplaseze în sus pe planul înclinat.



Varianta II (metoda descompunerii forţelor)

Pentru a începe să urce corpul pe planul înclinat trebuie ca:

$F_t=F_f+G_t$ sau

$F\cos\alpha=\mu N+mg\sin\alpha$, unde

$N=F_n+G_n=F\sin\alpha+mg\cos\alpha$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Substituind pe N, obţinem:

$$F\cos\alpha = \mu(F\sin\alpha + mg\cos\alpha) + mg\sin\alpha \rightarrow$$

$$F\cos\alpha = \mu F\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow ma(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow a = g\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = g\frac{(\cos\alpha)(tg\alpha + \mu)}{(\cos\alpha)(1 - \mu tg\alpha)} = g\frac{\mu + tg\alpha}{1 - \mu tg\alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = g\frac{\mu + tg\alpha}{1 - \mu tg\alpha}$$

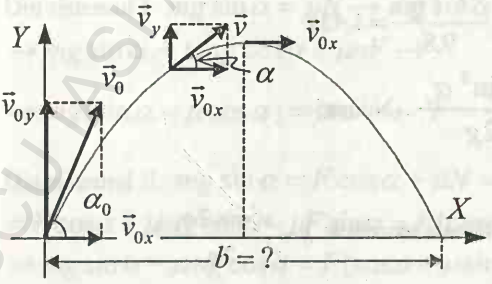
Indiferent că folosim varianta I sau II, obţinem acelaşi rezultat . Varianta I, a proiecţiile forţelor pe axele 0X şi 0Y este mai avantajoasă în cazul a mai multor forţe concentrate.

100. Un corp este aruncat (în vid) cu viteza iniţială $v_0 = 20m/s$ sub un unghi de $\alpha_o = 45^o$ faţă de orizontală. Să se afle:

a) după cât timp şi la ce înălţime vectorul vitezei formează un unghi $\alpha = 30^o$;

b) care este timpul de urcare, înălţimea maximă atinsă de corp cât şi bătaia teoretică.

(Fizica cl. IX, pag 328 /1979)



Rezolvare:

a) Din desen se vede:

$$\cos\alpha = \frac{v_{0x}}{v} = \frac{v_0\cos\alpha_0}{v} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \frac{v_0\cos\alpha_0}{\cos\alpha}.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dar $v_y = v_o \sin\alpha_o - gt$ şi cum $v_y = v\sin\alpha$, obţinem:

$v\sin\alpha = v_o \sin\alpha_o - gt \rightarrow$. Cum $v = \frac{v_o \cos\alpha_o}{\cos\alpha}$ avem:

$$gt = v_o \sin\alpha_o - \frac{v_o \cos\alpha_o}{\cos\alpha}\sin\alpha \rightarrow t = \frac{v_o \sin\alpha_o - \frac{v_o \cos\alpha_o}{\cos\alpha}\sin\alpha}{g} =$$

$$= \frac{v_o}{g}\left(\frac{\sin\alpha_o}{\cos\alpha_o} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha_o = \frac{v_o}{g}\left(tg\alpha_o - tg\alpha\right)\cos\alpha_o .$$

Timpul după care vectorul $\vec{v}$ face un unghi $\alpha = 30^o$ cu orizontala, se află cu relaţia : $t = \frac{v_o\left(tg\alpha_o - tg\alpha\right)\cos\alpha_o}{g}$.

Numeric : $t = \frac{20\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}{9{,}8} \cong 0{,}63s$. Înălţimea se calculează cu relaţia:

$$y = v_{oy}t - \frac{gt^2}{2} = v_o(\sin\alpha_o)t - \frac{gt^2}{2}$$

Numeric:

$$y = 20 \bullet (\sin 45^o) \bullet 0{,}63 - \frac{9{,}8}{2} \bullet 0{,}63^2 = 20 \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} \bullet 0{,}63 - 4{,}9 \bullet 0{,}63^2 \cong 6{,}8m$$

b) Timpul de urcare $t_u = \frac{v_o \sin\alpha_o}{g}$.

Numeric : $t_u = \frac{20 \bullet \sin 75^o}{9{,}8} = \frac{20 \bullet \frac{\sqrt{2}}{2}}{9{,}8} = 1{,}43s$

Înălţimea maximă: $h_m = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_o}{2g}$. Numeric:

$$h_m = \frac{400 \bullet \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \alpha_o}{19{,}6} = 10{,}1m .$$ Bătaia teoretică: $b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_o}{2g}$.

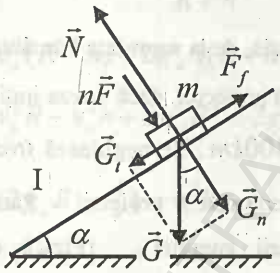
BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

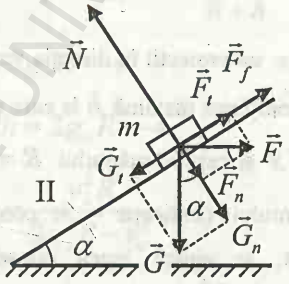
Numeric: $b = \frac{400 \sin 90^o}{19,6} = \frac{400 \bullet 1}{19,6} = 20,4m$.

Mărimile fizice aflate au valorile: $t = 0,63s$, $t_n = 1,43s$, $h_m = 10,1m$ şi $b = 20,4m$.

101. Ştiind că pentru a menţine în echilibru un corp pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30^o$, trebuie aplicată corpului o forţă minimă normală de $n = 2,5$ ori mai mare decât o forţă minimă orizontală, să se calculeze coeficientul de frecare dintre corp şi plan. (Fizica cl. IX, pag.237/1993)

Rezolvare:





$$I \begin{cases} G_t = F_t \\ F_t = \mu N \\ N = G_n + nF \end{cases} \qquad II \begin{cases} G_t = F_t + F_f \\ F_t = \mu N \\ N = G_n + F_n \end{cases}$$

Din sistemul I: $mg \sin\alpha = \mu N \rightarrow mg \sin\alpha = \mu(G_n + nF) =$

$\rightarrow mg \sin\alpha = \mu mg \cos\alpha + \mu nF \rightarrow$

$\rightarrow mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \mu nF \rightarrow \quad F = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu n} (1)$

Din sistemul II: $mg \sin\alpha = F\cos\alpha + \mu N = F\cos\alpha + \mu(G_n + nF) =$

$= F\cos\alpha + \mu mg\cos\alpha + \mu F \sin\alpha = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) + \mu mg\cos\alpha \rightarrow$

$\rightarrow mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha = F(\cos\alpha + \mu \sin\alpha) \rightarrow$

BCU ASISTENTAL UNIVERSITY LIBRARY

$\rightarrow F = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$ (2). Egalăm relaţia (1) cu (2) şi obţinem :

$$\rightarrow \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{n\mu} = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} \rightarrow$$

$$\rightarrow n\mu = \cos\alpha + \mu\sin\alpha \rightarrow \mu(n - \sin\alpha) = \cos\alpha \rightarrow \mu = \frac{\cos\alpha}{n - \sin\alpha}$$

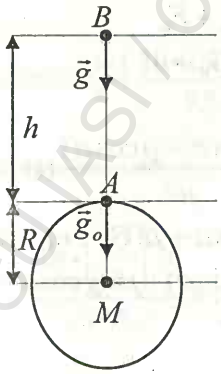
Numeric: $\mu = \dfrac{\cos 30^o}{2{,}5 - \sin 30^o} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2{,}5 - \frac{1}{2}} = 0{,}43$.

Coeficientul de frecare dintre corp şi plan este $\mu = 0{,}43$.

102. Se trage un proiectil în direcţie verticală, de la suprafaţa Pământului. Să se calculeze înălţimea maximă h la care urcă proiectul, dacă viteza iniţială este $v_0 = 10km/s$ şi raza Pământului $R = 6400km$. Se neglijează frecările şi rotaţia Pământului. (Indicaţie – Se consideră sistem proiectil – Pământ un sistem izolat, se aplică legea conservării energiei). (Fizică cl. IX, pag.237/1993).

Rezolvare:

Varianta I: Se aplică legea conservării energiei mecanice:



În punctul A: $E_c^A + E_p^A = E_A$ iar

În punctul B: $E_c^B + E_p^B = E_B$. Cum $E_A = E_B$,

scriem: $E_c^A + E_p^A = E_c^B + E_p^B$ (1). Dar $E_c^B = 0$,

$E_c^A = \dfrac{mv_o^2}{2}$, $E_p^A = -mg_oR$ şi

$E_p^B = -mg(R+h)$ şi substituind în (1) obţinem :

$\frac{mv_o^2}{2} - mg_oR = -mg(R+h) \rightarrow \quad \rightarrow v_o^2 - 2g_oR = -2g(R+h)$ (2). În punctul A de pe suprafaţa Pământului: $g_o = \frac{KM}{R^2}$ şi în punctul B: $g = \frac{KM}{(R+h)^2}$, încât relaţia (2) devine:

$$\rightarrow v_o^2 - 2R\frac{KM}{R^2} = -2\frac{KM}{(R+h)^2}(R+h) \rightarrow v_o^2 - 2g_0R = -\frac{2KM}{R+h}.$$

Cum $KM = gR^2$ avem:

$$\rightarrow v_o^2 - 2g_oR = -2\frac{g_oR^2}{R+h}\Big|-1 \rightarrow -v_o^2 + 2g_oR = 2\frac{g_oR^2}{R+h} \rightarrow .$$

$$\rightarrow -v_o^2(R+h) + 2g_oR(R+h) = 2g_oR^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow -v_o^2R - v_o^2h + 2g_oR^2 + 2g_oRh = 2g_oR^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow h(2g_oR - v_o^2) = v_o^2R \rightarrow \quad h = \frac{v_o^2R}{2g_oR - v_o^2}.$$

Înălţimea maximă h se calculează cu relaţia: $h = \frac{v_o^2R}{2g_oR - v_o^2}$

Numeric: $h = \frac{(10^4)^2 \bullet 6400 \bullet 10^3}{2 \bullet 9{,}8 \bullet 6400 \bullet 10^3 - (10^4)^2} \cong 2{,}5 \bullet 10^4 Km$.

Varianta II: Se aplică legea variaţiei energiei cinetice:

$\Delta E_c = L$ unde $\Delta E_c = \Delta E_c^B - \Delta E_c^A$ iar $L = -mg_1h$.

Dar cum $\Delta E_c^B = 0$, obţinem: $\rightarrow -\frac{mv_o^2}{2} = -mg_1h \rightarrow \quad \rightarrow v_o^2 = -2g_1h$ (1)

În punctul A $\rightarrow g_0 = \frac{KM}{R^2}$ iar în punctul B $\rightarrow g = \frac{KM}{(R+h)^2}$ şi cum g_o şi

g variază invers proporțional cu pătratul distanței, pe g_1 îl vom calcula ca fiind media geometrică a lui g_0 și g adică: $\rightarrow g_1 = \sqrt{g_0 g} = \sqrt{g_0 \frac{KM}{(R+h)^2}}$.

Cum $KM = g_0 R^2$, atunci : $\rightarrow g_1 = \sqrt{g_0 \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}} = \frac{g_0 R}{R+h} \rightarrow \quad \rightarrow g_1 = \frac{g_0 R}{R+h}$.

Valoarea $\rightarrow g_1 = \frac{g_0 R}{R+h}$ o substituim în relația (1) și găsim:

$v_o^2 = 2h\frac{g_0 R}{R+h} \rightarrow \quad \rightarrow v_o^2 R + v_o^2 h = 2g_o Rh \rightarrow$

$\rightarrow h(2g_o R - v_o^2) = v_o^2 R \rightarrow \quad h = \frac{v_o^2 R}{2g_o R - v_o^2}$ S-a regăsit aceiași valoare pentru h.

Varianta III: Ne folosim de ecuația Galileo-Galilei:

$0 = v_o^2 - 2g_1 h \rightarrow \quad 2g_1 h = v_o^2$. Cum $g_1 = \frac{g_0 R}{R+h}$ avem:

$2h\frac{g_0 R}{R+h} = v_o^2 \rightarrow 2hg_0 R = v_o^2 R + v_o^2 h \rightarrow h(2g_0 R - v_o^2) = v_o^2 R \rightarrow$

$h = \frac{v_o^2 R}{2g_0 R - v_o^2}$. S-a găsit aceiași relație pentru h ca și în celelalte două variante.

103. Se aruncă de la suprafața Pământului un corp cu viteza inițială v_0. Să se afle:

a) înălțimea la care corpul are viteza $\frac{v_0}{k}$

b) timpul la care corpul are viteza $\frac{v_0}{k}$

c) viteza pe care o are corpul la înălțimea $\frac{1}{k}$ din înălțimea maximă pe care o poate atinge?

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:

a) Pentru aflarea înălțimii h_1 aplicăm relația Galileo-Galilei:

$$v_1^2 = v_0^2 - 2gh_1 \text{ dar } v_1 = \frac{v_0}{k} \text{ și atunci: } \frac{v_0^2}{k^2} = v_0^2 - 2gh_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2gh_1 = v_0^2\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{v_0^2(k^2-1)}{k^2} \rightarrow \quad \rightarrow h_1 = \frac{v_0^2(k^2-1)}{gk^2}$$

b) Scriem ecuația vitezei: $v_1 = v_0 - gt_1 \rightarrow \quad \frac{v_0}{k} = v_0 - gt_1 \rightarrow$

$$\rightarrow gt_1 = v_0 - \frac{v_0}{k} \rightarrow \quad \rightarrow gt_1 = v_0\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{v_0(k-1)}{k} \rightarrow$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{v_0(k-1)}{gk}$$

c) Ne folosim de relația Galileo-Galilei:

$$v_1^2 = v_0^2 - 2g\frac{1}{k}h_m = v_0^2 - 2g\frac{1}{k}\frac{v_0^2}{2g} = v_0^2 - \frac{1}{k}v_0^2 = v_0^2\left(1-\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{v_0^2(k-1)}{k} \rightarrow \quad v_1 = v_0\sqrt{\frac{k-1}{k}}$$

Mărimile fizice căutate sunt: $\rightarrow h_1 = \frac{v_0^2(k^2-1)}{gk^2}$; $t_1 = \frac{v_0(k-1)}{gk}$ și

$v_1 = v_0\sqrt{\frac{k-1}{k}}$.

104. Un satelit este lansat în jurul Pământului pe orbita circulară la altitudinea h deasupra Pământului. Masa satelitului este m_s și masa Pământului este m_p.

Se cer:

a) viteza tangențială ce trebuie imprimată satelitului pentru a se menține la o altitudine h deasupra Pământului;

b) viteza unghiulară și perioada de rotație;

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) câte rotații face satelitul în timp t

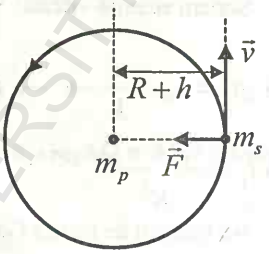
d) forța cu care-l atrage Pământul și

e) energia cinetică maximă, dacă își pierde energia inițială, se oprește un scurt timp și apoi cade la Pământ.

Rezolvare:

a) $F = F_{cp} \rightarrow \dfrac{km_p m_s}{(R+h)^2} = \dfrac{m_s v^2}{R+h} \rightarrow \dfrac{km_p}{R+h} = v^2 \rightarrow v = \sqrt{\dfrac{km_p}{R+h}}$

b) $\omega = \dfrac{v}{R+h}$ și $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi(R+h)}{v}$;



c) $n = \dfrac{t}{T} = \dfrac{tv}{2\pi(R+h)}$;

d) $F = \dfrac{km_p m_s}{(R+h)^2}$

e) Întrucât satelitul își pierde energia inițială, se oprește o fracțiune de timp și dacă presupunem că în cădere liberă nu se topește datorită frecărilor cu aerul, atunci ajunge pe Pământ și va avea o energie cinetică maximă:

$$E_{cm} = \frac{m_s v_m^2}{2} = m_s gh \rightarrow \quad E_{cm} = m_s gh .$$

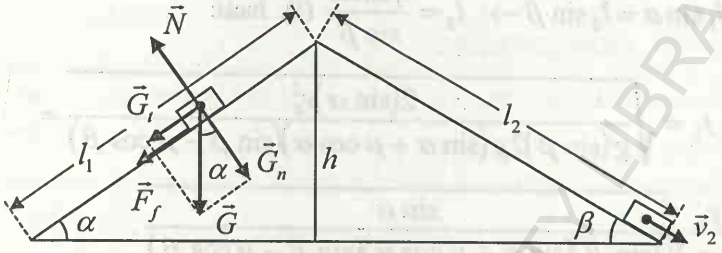
105. Un corp se aruncă de jos în sus, cu o viteză $\vec{v}_0$ pe un plan de unghi α. Ajuns în vârful planului se oprește un timp foarte scurt, după care își continuă mișcarea pe un alt plan înclinat de unghi β, fără viteză inițială. Planele înclinate sunt lipite spate în spate iar coeficientul de frecare pe cele două plane este același și notat cu μ. Să se calculeze :

a) timpul total parcurs de corp pe cele două plane înclinate, fără a lua în considerare timpul foarte scurt cât se oprește corpul când ajunge în vârful primului plan înclinat și

b) spațiul total parcurs în acest timp.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:



a)Pentru planul de unghi α: $-G_t - F_f = ma_u \rightarrow$

$\rightarrow -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = a_u \quad \rightarrow a_u = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$

$0 = v_0 + a_u t_1 \rightarrow -v_0 = a_u t_1 \rightarrow t_1 = \dfrac{-v_0}{a_n} = \dfrac{-v_0}{-g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \rightarrow$

$\rightarrow t_1 = \dfrac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$.

$0 = v_0^2 + 2a_u l_1 \rightarrow l_1 = \dfrac{-v_0^2}{2a_u} = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \rightarrow$

$\rightarrow l_1 = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$. În cazul planului de unghi α:

$$t_1 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \text{ şi } l_1 = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

Pentru planul de unghi β: $v_2 = a_c t_2$. Dar $a_c = g(\sin\beta - \mu\cos\beta)$, încât: $v_2 = g(\sin\beta - \mu\cos\beta)t_2$

$v_2 = \sqrt{2a_c l_2} = \sqrt{2g(\sin\beta - \mu\cos\beta)l_2}$. Egalăm ultimele două relaţii şi obţinem: $g(\sin\beta - \mu\cos\beta)t_2 = \sqrt{2g(\sin\beta - \mu\cos\beta)l_2}$

$\rightarrow t_2 = \dfrac{\sqrt{2g(\sin\beta - \mu\cos\beta)l_2}}{g(\sin\beta - \mu\cos\beta)} = \sqrt{\dfrac{2g(\sin\beta - \mu\cos\beta)l_2}{g^2(\sin\beta - \mu\cos\beta)^2}} =$

$= \sqrt{\dfrac{2l_2}{g(\sin\beta - \mu\cos\beta)}}$; $\quad t_2 = \sqrt{\dfrac{2l_2}{g(\sin\beta - \mu\cos\beta)}}$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum înălțimea este comună celor două plane, atunci avem:

$h = l_1 \sin\alpha = l_2 \sin\beta \rightarrow \quad l_2 = \dfrac{l_1 \sin\alpha}{\sin\beta}$ (1), încât:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(\sin\alpha)v_0^2}{g(\sin\beta)2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)(\sin\beta-\mu\cos\beta)}} =$$

$$= \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{\sin\alpha}{(\sin\beta)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)(\sin\beta-\mu\cos\beta)}}.$$

Cunoscând pe t_1 şi t_2, atunci : $t = t_1 + t_2$.

b)Spațiului total: $l = l_1 + l_2 = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)} + l_1\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)} +$

$$+\frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}\bullet\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}\left(1+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) =$$

$$= \frac{v_0^2(\sin\alpha+\sin\beta)}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\sin\beta} \rightarrow l = \frac{v_0^2(\sin\alpha+\sin\beta)}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\sin\beta}.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

FENOMENE TERMICE

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BREVIAR

Capitolul 1. Structura substanței

Concepția atomistă despre substanțe a fost dată de Leucip și Democrit în antichitate.

În secolele al XVII-lea și al XIX-lea pe baza unor experimente s-au stabilit anumite legi: legea proporțiilor diferite, a proporțiilor multiple, legea Avogadro, legile gazelor ideale etc.

Difuzia moleculară la gaze, lichide și solide pune în evidență existenta mișcării continuă și dezordonată a moleculelor.

Moleculele oricui corp, indiferent de starea lui de agregare, se află într-o mișcare permanentă, dezordonată numită mișcare termică sau agitație termică.

Agitația termică nu este produsă de o cauză exterioară și nu încetează niciodată și depinde de temperatură.

Unele mărimi legate de structura discretă a substanței sunt: masa atomică relativă, masa moleculară relativă, mol, numărul lui Avogadro, volum molar în condiții normale, distanța dintre moleculele unui gaz aflat în condiții normale etc.

Masa atomică relativă: numărul care arată de câte ori masa unui atom este mai mare decât a 12-a parte din masa atomului de carbon ($^{12}_{6}C$).

Masa moleculară relativă: numărul care arată de câte ori masa unei molecule este mai mare decât a 12-a parte din masa atomului de carbon ($^{12}_{6}C$).

Masa moleculară relativă a moleculelor compuse se află însumându-se masele relative ale atomilor ce compun molecula respectivă.

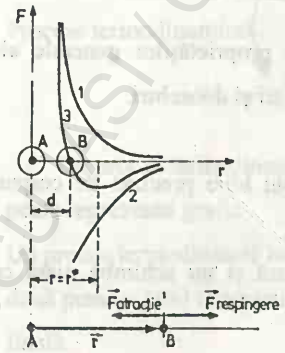
Mol : Cantitatea de substanță a cărei masă exprimată în grame, este numeric egală cu masa moleculară relativă a substanței date.
Masa unui mol se numește masa moleculară și se notează cu μ iar $<\mu>_{SI} = Kg/Kmol$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Numărul lui Avogadro (N_A): numărul de molecule dintr-un mol de substanţă şi are o valoare: $N_A = 6{,}023 \bullet 10^{26}$ molecule. Volumul molar ($V_{\mu o}$): volumul unui mol dintr-un gaz în condiţii normale (t^oC şi p=1 atm.) are valoarea $V_{\mu o} = 22{,}4 \frac{m^3}{kmol}$.

În ajutorul rezolvărilor de probleme din acest capitol este necesar să se cunoască relaţiile:

- $N = N_o V$ unde N : numărul total de molecule dintr-o substanţă de volum V
  N_0 : numărul de molecule din unitatea de volum şi se mai numeşte şi numărul lui Loschmidt şi are valoarea : $N_0 = 2{,}7 \bullet 10^{25} \frac{molecule}{m^3}$
- $N_A = N_o V_{\mu O}$
- $\mu = m_0 N_A$ μ : reprezintă masa molară şi m_0 : masa unei molecule
- $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{V_0}{V_{MO}} = \frac{m}{\mu} \rightarrow$ $\nu \rightarrow$ numărul de kmoli dintr-o substanţă de masă m şi masa molară μ
- $\rho_o = \frac{\mu}{V_{\mu o}} \rightarrow \rho_o \rightarrow$ densitatea unui gaz în condiţii normale ($t = 0^o C$, p=1 atm.)



$$d = \sqrt[3]{\frac{m_o}{\rho_o}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A \rho_o}} = \sqrt[3]{\frac{V_{\mu 0}}{N_A}} = \sqrt[3]{\frac{1}{N_0}}$$

Reprezentarea grafică a forţelor de interacţie dintre molecule în funcţie de distanţă.

1→ curba forţelor de respingere dintre molecule

2→ curba forţelor de atracţie dintre molecule

3→ curba forţei rezultante.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

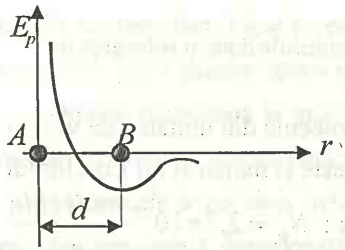
$d \rightarrow$ diametru eficace

Relația vectorială dintre cele două forțe este: $\vec{F} = \vec{F}_{at} + \vec{F}_{resp}$ iar modulul :

$F = \sqrt{F_{at}^2 + F_{resp}^2 + 2F_{at}F_{resp}\cos 180^o}$. Cum $\cos 180^o = -1$ rezultă că

$F = F_{at} - F_{resp}$

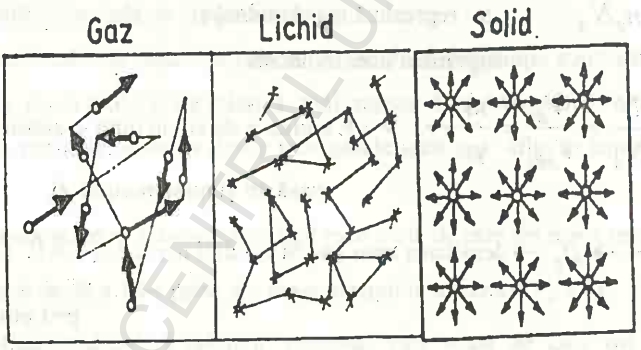
Reprezentarea grafică a energiei potențiale în funcție de distanță:



Energia unei molecule: $E = E_p + \frac{mv_B^2}{2}$

Energia internă a unui sistem reprezintă suma dintre : energiile cinetice ale tuturor moleculelor, ale energiilor potențiale determinate de forțele intermoleculare și a energiilor potențiale în câmpurile de forță exterioare.

Pentru studiu substanțelor se folosesc 3 modele: un anumit model pentru gaze, un alt model pentru lichide și în fine un model pentru solide.



Pe baza acestor modele se port discuții asupra proprietăților generale ale gazelor , lichidelor și solidelor, cât și unele asemănări și deosebiri.

Capitolul 2. Noțiuni termodinamice de bază:

- Sistem: orice corp macroscopic sau ansamblu bine precizat de corpuri macroscopice.
- Sistem termodinamic izolat: nu interacționează și nu schimbă masă cu corpurile exterioare.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- Sistem termodinamic
  - **închis** – dacă între sistemul respectiv şi mediu extern există schimb de energie dar nu există schimb de masă;
  - **deschis** dacă între sistemul respectiv şi mediu exterior există atât schimb de energie cât şi schimb de masă

Starea sistemului termodinamic este dată la un moment dat de anumiţi parametri de stare – mărimi fizice măsurabile.

Parametri de stare caracterizează – proprietăţile sistemului termodinamic şi îşi modifică valoarea în funcţie de condiţiile exterioare.

Nu toţi parametri de stare au valori independente. Între parametrii mărimilor de stare există relaţii.

Parametri de stare se pot clasifica în diferite criterii:

unii pot fi extensivi şi intensivi, iar alţii pot fi parametri de forţă şi parametri de poziţie.

Starea de echilibru termodinamic: parametri sistemului termodinamic sunt constanţi în timp.

Procese termodinamice
- cvasistatice → parametri de stare variază lent în timp
- necvasistatice → variază rapid în timp

Un proces termodinamic cvasistatic (izoterm, izocor, izobar, adiabatic) se poate reprezenta grafic .

Un proces termodinamic necvasistatic nu se poate reprezenta grafic decât prin două puncte: unul reprezentând starea iniţială a sistemului iar celălalt starea finală.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Procesele
- reversibile → cvasistatice
- ireversibile → necvasistatice

Postulatul echilibrului (Boltzmann): Dacă un sistem termodinamic este scos din starea de echilibru şi se izolează de mediul exterior, atunci el revine întotdeauna de la sine în starea de echilibru şi nu poate ieşi din această stare fără acţiunea unei forţe exterioare.

Principiul tranzitivităţii echilibrului termic:

Două sisteme A şi B sunt în echilibru termic, iar acesta din urmă este în echilibru termic cu un al treilea sistem C, atunci sistemul A şi sistemul C sunt în echilibru termic.

Pe baza principiului tranzitivităţii echilibrul termic s-a definit temperatura empirică.

- Temperatura empirică este mărimea ce caracterizează starea de echilibru termic a unui sistem.

Pentru măsurarea temperaturii unui corp se foloseşte un dispozitiv special construit, numit termometru.

La un termometru deosebim corpul termometrului (gaz, lichid, rezistor) şi scară termometrică.

Se cunosc scările termometrice: Celsius, Réaumur, Fahrenheit şi Kélvin.

Relaţia de transformare a temperaturilor dintre diferite scări:

$$\frac{t^oC}{5}=\frac{t^oR}{4}=\frac{t^oF-32^o}{9} \quad \text{şi} \quad Tk=273{,}15+t^oC$$

Capitolul 3. Teoria cinetico-moleculară.

3.1 Caracteristicile principale ale modelului gazului ideal.

1. Gazul este format dintr-un număr foarte mare de particule identice (molecule sau atomi)

BCUAS / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. Dimensiunile moleculelor sunt mici în comparaţie cu distanţele dintre ele, astfel că ele pot fi considerate puncte materiale.
3. Moleculele se află într-o mişcare haotică continuă; mişcarea fiecărei molecule, luată separat, se supune legilor mecanice clasice:
4. Forţele intermoleculare se neglijează : moleculele se mişcă liber, traiectoriile sunt linii drepte.
5. Ciocnirile dintre molecule şi pereţii vasului sunt elastice.

3.2 Formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare:

$p = \frac{1}{3} nm\vec{v}^2 = \frac{2}{3} n\vec{\varepsilon}_t$ unde $\vec{\varepsilon}_t = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT \rightarrow \vec{\varepsilon}_t$ reprezintă energia cinetică medie a unei molecule în mişcarea de translaţie (aceiaşi pentru toate moleculele)

n → concentraţia moleculelor : $n = \frac{N}{V}$

m → masa unei molecule

k → constanta lui Boltzmann $K = 1{,}38 \bullet 10^{-23} \frac{j}{K}$

Ecuaţia
- termică: $p = nkT$
- calorică: $U = \frac{i}{2} \nu RT$, unde i reprezintă numărul gradelor de libertate.

- viteza termică $v_T = \sqrt{\vec{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$

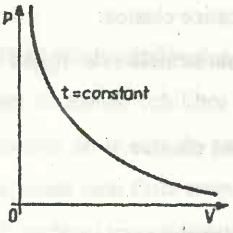
3.3 Transformări simple ale gazului ideal.

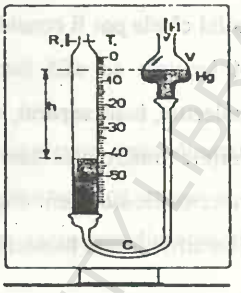
3.3.1 Legea Boyle-Mariote sau legea transformării izoterme (t=const., m=const.)

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Presiunea unui gaz aflat la temperatură constantă variază invers proporțional cu volumul gazului : $pV = constat$

Graficul legii Boyle-Mariotte:

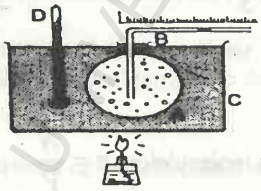




. Aparat pentru verificarea legii transformării izoterme.

3.3.2 Legea Gay-Lussac sau legea transformării izobare (v=const.,m=const.)

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \alpha t$$



. Verificarea legii transformării izobare.

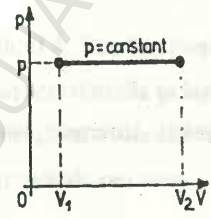
Variația relativă a volumului unui gaz, aflat la presiune constantă, este direct proporțional cu temperatura.

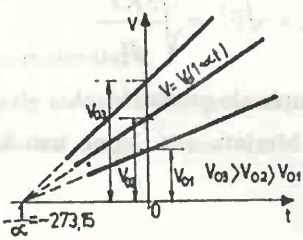
$\alpha \rightarrow$ coeficient de dilatare izobară

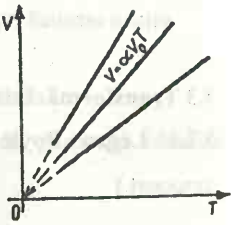
$$\alpha = \frac{1}{T_0} = 0{,}00366 grad^{-1} \qquad <\alpha>_{SI} = K^{-1}$$

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

Graficul legii Gay-Lussac:



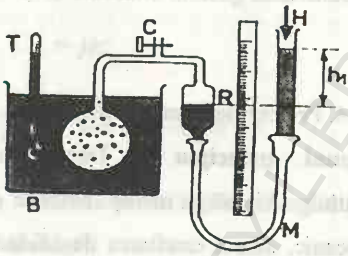




BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3.3.3. Legea lui Charles sau legea transformării izocore (V=const, m=const.)

$$\frac{p-p_0}{p_0}=\beta t$$



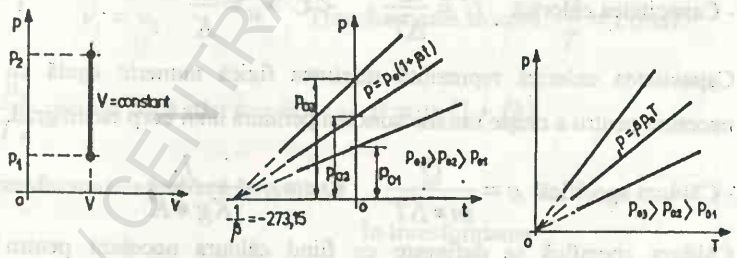
6. Verificarea legii transformării izocore.

Variația relativă a presiunii unui gaz menținut la volum constant este direct proporțional cu temperatura.

$$\beta=\alpha=\frac{1}{T_0} \qquad <\beta>_{SI}=K^{-1}$$

$p=p_0(1+\beta t)$ $\beta \rightarrow$ coeficient termic al presiunii

Graficul legii Charles :



3.3.4. Ecuația Clayeron-Mendeleev.

$$pV=\frac{m}{\mu}RT=\nu RT \quad \text{unde } R=\frac{p_0V_{\mu 0}}{p_0}=8314\frac{j}{Kmol\bullet K}$$

constanta universală a gazelor

$$\frac{pV}{T}=const \rightarrow$$ legea generală a gazelor ideale

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

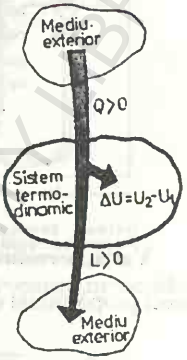
Densitatea gazului aflat la T şi p : $\rho = \rho_0 \frac{pT_0}{p_0 T}$

Capitolul 4. Principiile termodinamicii.

4.1. Primul principiu : Dacă un sistem termodinamic schimbă cu mediul exterior căldura şi lucrul mecanic, atunci cantitatea de căldură primită de sistem este egală cu variaţia energiei interne a sistemului plus lucru mecanic efectuat de sistem:

$$Q = \Delta U + L$$

Primul principiu al termodinamicii constituie extinderea legii conservării şi transformării energiei la procesele termodinamice:



Reprezentarea schematică a conservării energiei

4.2 Coeficienţi calorici

- Capacitatea calorică: $C = \frac{Q}{\Delta T}$ $\quad < C >_{SI} = \frac{j}{K}$

Capacitatea calorică reprezintă mărimea fizică numeric egală cu căldura necesară pentru a creşte sau micşora temperatura unui corp cu un grad.

- Căldura specifică: $c = \frac{Q}{m \bullet \Delta T}$ $\quad < c >_{SI} = \frac{j}{Kg \bullet K}$

Căldura specifică se defineşte ca fiind căldura necesară pentru a mări temperatura unui kilogram dintr-o substanţă cu un grad.

- Căldura molară (C_μ) reprezintă căldura necesară pentru a varia temperatura unui kilogram dintr-o substanţă cu un grad.

$$C_\mu = \frac{Q}{\nu \bullet \Delta T} \qquad < C_\mu >_{SI} = \frac{j}{Kmol \bullet K}$$

Între C_μ , μ şi c există relaţia:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$C_\mu = \mu c$$

Vom avea la gaze : $C_V = \mu c_v$ şi $C_p = \mu c_p$.

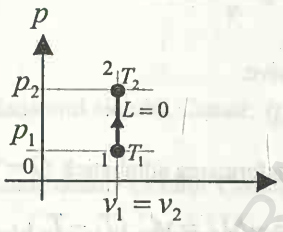
Relaţia lui Robert Mayer: $C_p - C_v = R$ sau $c_p - c_v = \frac{R}{\mu}$.

4.3. **Expresiile lucrului mecanic, căldurii şi variaţiile energiei interne în transformările simple ale gazelor ideale.**

Pe baza primului principiu $Q = \Delta U + L$, vom stabili la fiecare transformare simplă mărimile fizice : L, Q şi ΔU.

Vom trata la procesele izocore, izobare, izoterme şi adiabatice.

1. **Transformarea izocoră (V=const.)**



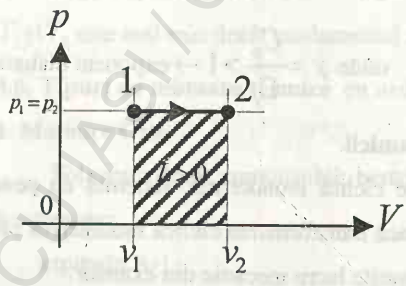
Cum $V_1 = V_2 \rightarrow \Delta V = 0$, ceea ce face ca $L = 0$, încât din $Q = \Delta U + L$, obţinem

$$Q_v = \Delta U = \nu C_v \Delta T$$

Transformarea izocoră: $\frac{p}{T} = const$

$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T2}$ pentru două stări succesive şi $p = p_0(1+\beta t)$

2. **Transformarea izobară (p=const.)**



În transformarea izobară: $p_1 = p_2 = p$ iar

$L = p\Delta V = \nu R \Delta T$,

$\Delta U = \nu C_v \Delta T$ şi

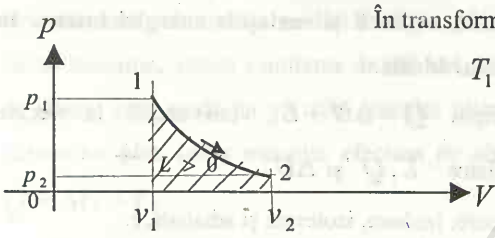
$Q_v = \nu C_v \Delta T$.

Transformarea izobară:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\frac{V}{T} = const.$, $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ pentru două stări succesive şi $V = V_0(1+\alpha t)$

3. Transformarea izotermă (T=const.)



În transformarea izotermă :

$T_1 = T_2 = T$, $\Delta U = 0$ şi

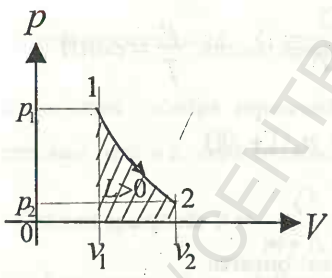
$$Q = L = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} =$$

$$= 2{,}3\nu RT \lg \frac{V_2}{V_1}$$

Transformarea izotermă: $pV = const.$ sau

$p_1V_1 = p_2V_2$ pentru două transformări succesive.

4. Transformarea adiabatică (Q=0)



În transformarea adiabatică $Q = 0$ şi

$$L = -\Delta U = \nu C_v (T_1 - T_2)$$

Transformarea adiabatică:

$$pV^{\gamma} = const$$

$TV^{\gamma-1} = const \rightarrow$ ecuaţia lui Poisson.

unde $\gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1 \rightarrow$ exponent diabatic

4.4. Principiul al doilea al termodinamicii.

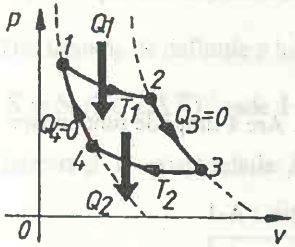
W. Thomson: Într-o transformare ciclică monotermă, sistemul nu poate ceda lucru mecanic în exterior. Dacă transformarea ciclică monotermă este şi ireversibilă, atunci sistemul primeşte lucru mecanic din exterior.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

R. Clausius: Nu este posibilă o transformare care să aibă ca rezultat trecerea de la sine a căldurii de la un corp cu o temperatură dată la un corp cu temperatură mai ridicată.

4.5. Randamentul unei maşini termice: $\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} < 1$

4.5. Ciclul Carnot



1-2: destindere izotermă

2-3: destindere adiabatică

3-4: comprimare izotermă

4-1: comprimare adiabatică

Randamentul ciclului Carnot: $\eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

Randamentul ciclului Carnot nu depinde de natura substanţei de lucru, ci depinde numai de temperaturile absolute T_1 şi T_2 ale surselor calde şi reci.

Randamentul ciclului Carnot este calculat în cazul unui ciclu ideal, este un randament teoretic, maxim şi întotdeauna subunitar.

În cazul unei maşini reale, η_{real} ce funcţionează între temperaturile T_1 şi T_2 este mai mic decât randamentul ciclului Carnot $\eta_{real} < \eta_c$.

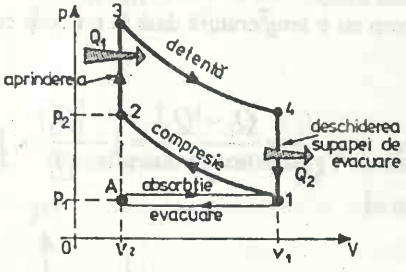
4.6. Tipuri de motoare termice cu ardere internă

1. Motoare Otto.

Foloseşte drept combustibil: benzină în amestec cu aer şi are 4 timp de funcţionare:

- aspiraţia A-1
- compresia 1-2

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

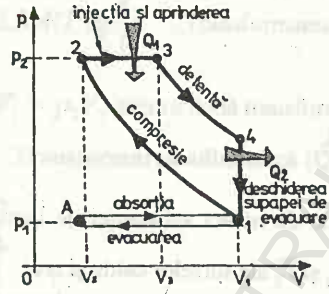


- aprinderea şi detenta : 2-3 şi 3-4
- evacuarea 1-A

Formula randamentului unui motor Otto este : $\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$ unde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ şi $\varepsilon = \frac{V_1}{V_1}$ raportul de compresie

2. Motorul Diesel.

Foloseşte drept combustibil motorină pulverizată . Are 4 timpi de funcţionare:



- absorbţia : A-1
- compresia : 1-2
- arderea şi detenta : 2-3 şi 3-4
- evacuarea : 1-A

Capitolul 5. Dilatarea solidelor

5.1 Dilatarea liniară (lungime) → are loc după o singură dimensiune.

Studiul dilatării se face cu comparatorul, aflându-se alungirile Δl la diferite bare metalice.

Formula de definiţie a coeficientului de dilatare liniară:

$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta T}$ unde $<\alpha>_{SI} = K^{-1}$, $\Delta l = l - l_0$, $\Delta T = T - T_0$ şi

l_0 → lungimea iniţială

În formula $l = l_0(1+\alpha\Delta T)$, $\rightarrow 1+\alpha\Delta T$ → binom de dilataţie liniară iar

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

valorile lui α depind de natura substanței supusă dilatării și se determină experimental.

5.2. **Dilatarea în suprafață** → are loc după două dimensiuni.

Formula de definiție a coeficientului de dilatare în suprafață:

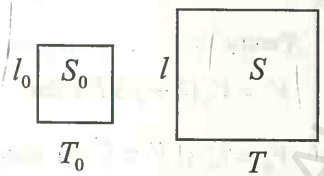
$$\beta = \frac{\Delta S}{S_0 \Delta T} \quad \text{unde} < \beta >_{SI} = K^{-1},\ \Delta S = S - S_0 \text{ și } \Delta T = T - T_0$$

S_0 → suprafața inițială la T_0, S → suprafața finală la T

Din formula de definiție a lui β obținem:

$S = S_0(1 + \beta \Delta T)$ unde $1 + \beta \Delta T$ → binom de dilatație în suprafață

Între α și β există relația $\beta \equiv 2\alpha$ și se poate demonstra.



Suprafața considerată inițială are forma unui pătrat cu lungimea laturii l_0, la temperatura absolută T_0 și la suprafața S_0. Supunând la o temperatură absolută T, lungimea devine l, suprafața S:

Pentru S: $S = S_0(1 + \beta \Delta T)$ unde $S_0 = l_0^2$ și $S = l^2$, încât:

$l^2 = l_0^2(1 + \beta \Delta T)$ dar $l = l_0(1 + \alpha \Delta T)$ și atunci:

$l_0^2(1 + \alpha \Delta T)^2 = l_0^2(1 + \beta \Delta T) \rightarrow (1 + \alpha \Delta T)^2 = 1 + \beta \Delta T \rightarrow$

$1 + 2\alpha \Delta T + \alpha^2 (\Delta T)^2 = 1 + \beta \Delta T \quad \rightarrow 2\alpha \Delta T + \alpha^2 (\Delta T)^2 = \beta \Delta T \rightarrow$

$\rightarrow 2\alpha + \alpha^2 \Delta T = \beta$. Cum $\alpha^2 \Delta T$ are valoare foarte mică, se neglijează și relația devine: $\beta \equiv 2\alpha$

5.3. Dilatarea în volum – are loc după toate cele trei direcții: lungime, lățime, înălțime.

BUJIAS CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Formula coeficientului de dilatare în volum : $\gamma = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta T}$ unde

$<\gamma>_{SI} = K^{-1}$, $\Delta V = V - V_0$ şi $\Delta T = T - T_0$, $V_0 \rightarrow$ volumul iniţial la T_0 şi V volumul final la T.

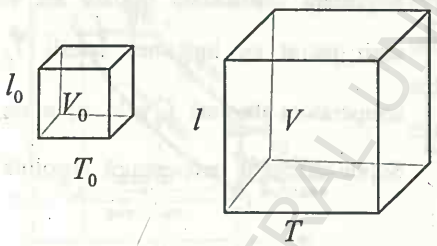
Din formula de definiţie a coeficientului de dilatare în volum γ ,obţinem:

$V = V_0(1+\gamma\Delta T)$ unde $1+\gamma\Delta T$ se numeşte binom de dilatare în volum.

Între α şi γ există relaţia $\gamma \equiv 3\alpha$ şi se poate demonstra.

Corpul considerat iniţial la T_0 este un cub cu l_0 şi volum V_0.

Prin încălzire la T, corpul îşi menţine forma, însă dimensiunile se măresc trecând în l şi V de la l_0 şi V_0



Pentru V:

$V = V_0(1+\gamma\Delta T)$ dar

$V_0 = l_0^3$ şi $V = l^3$ şi atunci avem : $l^3 = l_0^3(1+\gamma\Delta T)$.

Cum $l = l_0(1+\alpha\Delta T)$ şi înlocuind în $l^3 = l_0^3(1+\gamma\Delta T)$ găsim :

$l_0^3(1+\alpha\Delta T)^3 = l_0^3(1+\gamma\Delta T) \rightarrow (1+\alpha\Delta T)^3 = 1+\gamma\Delta T \rightarrow$

$\rightarrow 1+3\alpha\Delta T+3\alpha^2(\Delta T)^2+\alpha^3(\Delta T)^3 = 1+\gamma\Delta T \rightarrow$

$\rightarrow 3\alpha\Delta T+3\alpha^2(\Delta T)^2+\alpha^3(\Delta T)^3 = \gamma\Delta T \rightarrow$

$\rightarrow 3\alpha+3\alpha^2\Delta T+\alpha^3(\Delta T)^2 = \gamma$ Cum termenii $3\alpha^2\Delta T$ şi $\alpha^3(\Delta T)^2$ au valori foarte mici, se pot neglija din relaţie şi se obţine: $\gamma \cong 3\alpha$

- variaţia densităţii unui corp solid cu temperatura: $\rho = \frac{\rho_0}{1+\gamma\Delta T}$ unde

ρ_0 este densitatea corpului la T_0, $\gamma \rightarrow$ coeficientul de dilatare în volum şi

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\Delta T = T - T_0$.

- Efortul unitar într-o bară încălzită şi fixată la ambele capete: $\frac{F}{S} = \sigma = E\alpha\Delta T$ unde : $E \rightarrow$ modul de elasticitate a corpului supus încălzirii.

$\alpha \rightarrow$ coeficientul de dilatare liniară

$\Delta T \rightarrow$ variaţia de temperatură absolută

Capitolul 6. Studiul lichidelor.

6.1. Dilatarea lichidelor

Coeficientul de dilatare al lichidelor : $\gamma = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta T}$ unde : $\gamma \rightarrow$ coeficientul de dilatare termică

Unitatea lui γ : $<\gamma>_{SI} = K^{-1}$, $\Delta V = V - V_0$

$V_0 \rightarrow$ volumul lichidului la T_0

$V \rightarrow$ volumul lichidului la T şi

$\Delta T = T - T_0$

De remarcat faptul că coeficientul de dilatare al lichidelor este mai mic decât al gazelor, dar mai mare decât al solidelor, prezentând şi el variaţii cu temperatura. Pe intervale mici de temperatură γ poate fi constant şi înlocuit cu valoarea sa medie pe domeniul respectiv.

Din formula de definiţie a lui γ , obţinem , $V = V_0(1 + \gamma\Delta T) \rightarrow$ unde

$1 + \gamma\Delta T \rightarrow$ binom de dilatare în volum al lichidelor

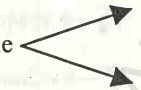
Densitatea lichidului variază cu temperatura după relaţia $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}$ unde ρ_0 este densitatea lichidului la $0^0 C$, $\gamma \rightarrow$ coeficientul de dilatare termică şi $t \rightarrow$ temperatura la care se află lichidul.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece lichidul se găseşte într-un vas (sticlă, metal), trebuie să se ţină seama şi de dilatarea vasului şi de dilatare aparentă , încât între $\gamma_a = \frac{\Delta V_a}{V_0 \Delta T}$, coeficientul real al lichidului $\gamma = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta T}$ şi $\gamma_{vas} = \frac{\Delta V_{vas}}{V_0 \Delta T}$ există relaţia: $\gamma = \gamma_a + \gamma_{vas}$.

Între $0^0 C$ şi $4^0 C$, apa are o comportare deosebită → denumită anomalia dilatării termice a apei. Anomalia dilatării termice a apei se datoreşte variaţiei concentraţiei diverselor grupe de molecule din care este compusă apa $[H_2O, (H_2O)_2, (H_2O)_3]$ cu temperatura.

6.2. Fenomene superficiale.

Fenomene superficiale  de suprafaţă

de adeziune şi capilaritate

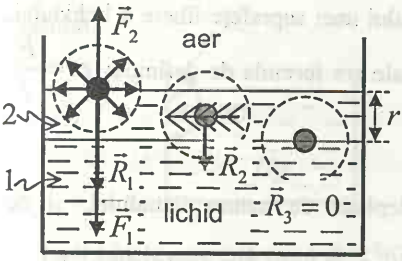
Sfera de acţiune moleculară: Spaţiul din jurul unei molecule în care se manifestă forţe de interacţiune moleculară asupra acelei molecule.

Raza de acţiune moleculară este tocmai raza de acţiune moleculară şi are o valoare de $10^{-9} m$

Raza de acţiune moleculară constituie o măsură a stratului superficial.

6.2.1. Stratul superficial: o pătură superficială, de grosimea unei raza de acţiune moleculară şi care produce presiunea internă a lichidului. Moleculele pot intra din lichid în stratul superficial sau ieşi, ceea ce face ca statul superficial să se mărească sau să se micşoreze. La intrarea moleculelor din stratul superficial în lichid, suprafaţa acestui se micşorează iar lucrul mecanic

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



este pozitiv iar trecerea moleculelor din lichid în stratul superficial, suprafaţa acestuia se măreşte iar lucrul mecanic este negativ.

De aici reiese că lucrul mecanic L_s este proporţional cu ΔS, încât $L_s = -\sigma \Delta S$ unde σ se numeşte coeficient de tensiune superficial şi are numai valoare pozitivă $\sigma > 0$.

Semnul – reflectă legătura dintre lucrul mecanic şi ΔS. Dacă $\Delta S > 0$, atunci $L_s < 0$ iar dacă $\Delta S < 0$, atunci $L_s > 0$.

Din mecanică se ştie că $\Delta E_p = -L$, iar în cazul stratului superficial

$$: \Delta E_{ps} = -(-\sigma \Delta S) = \sigma \Delta S \quad \text{sau}$$

$$\Delta E_{ps} = \sigma \Delta S \rightarrow \quad \sigma = \frac{\Delta E_{ps}}{\Delta S} \quad \text{iar}$$

$$<\sigma>_{SI} = \frac{<\Delta E_{ps}>_{SI}}{<\Delta S>_{SI}} = \frac{j}{m^2}. \qquad \text{Cum } 1j = 1N \bullet 1m, \text{ atunci}$$

$$<\sigma>_{SI} = \frac{N \bullet m}{m^2} = \frac{N}{m} \qquad \text{Pentru } <\sigma>_{SI}$$

Forţele tangenţiale la suprafaţa liberă a lichidului şi perpendiculare pe contur, ce au ca efect micşorarea suprafeţei stratului superficial se numesc forţe de tensiune superficiale.

BUCIASKI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă ne referim la lungimea conturului unei suprafeţe libere a lichidului, atunci coeficientul de tensiune superficiale are formula de definiţie: $\sigma = \frac{F}{l}$

unde $<\sigma>_{SI} = \frac{N}{m}$.

S-a constatat experimental că σ depinde de natura lichidului, şi de temperatură.

6.2.2. Adeziune. Capilaritate.

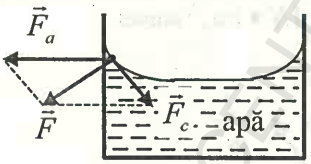
Interacţiunile lichid-lichid sunt caracterizate prin forţe de coeziune $(\vec{F}_c)$ iar interacţiunile lichid-solid, prin forţe de adeziune $(\vec{F}_a)$.

Când lichidul udă vasul $F_a > F_c$ iar când lichidul nu udă vasul $F_a < F_c$.

Menisc: forma pe care o ia lichidul în contact cu peretele vasului în care se găseşte şi poate fi concav sau convex.

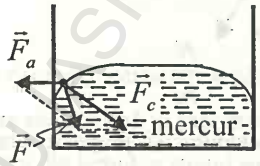
Forma meniscurilor:

a) **Concav** (lichidul udă vasul, $F_a > F_c$)



Datorită rezultantei $\vec{F}$ îndreptată spre exteriorul lichidului, moleculele urcă pe lângă peretele vasului, formând meniscul concav

b) **Convex** (lichidul nu udă vasul, $F_a < F_c$)

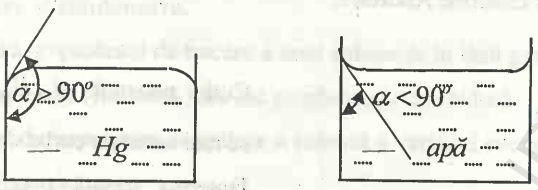


Datorită rezultantei $\vec{F}$ îndreptată spre interiorul lichidului, moleculele coboară pe lângă peretele vasului, formând meniscul convex.

Unghi de racordare α: reprezintă unghiul format dintre tangenta la menisc în punctul de contact cu peretele

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

vasului.



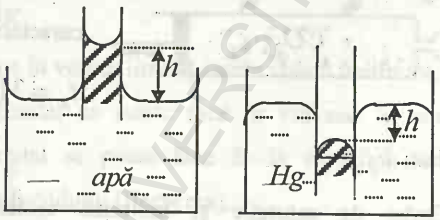
La lichidele care udă vasul $\alpha < 90^o$, iar la cele ce nu udă vasul $\alpha > 90^o$.

- **Legea lui Jurin:**

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \frac{4\sigma}{\rho g d}$$

r→ raza capilarului

d→diametrul capilarului

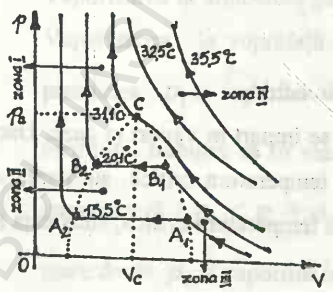


Enunțarea legii Jurin: Denivelările (urcările, coborârile) în tuburile capilare sunt invers proporționale cu mărimea razelor tuburilor capilare, respectiv cu diametrele.

Între plăcile plane și paralel așezate la distanța d foarte mică, denivelările se calculează cu formula : $h = \frac{2\sigma}{\rho g d}$, unde $d \rightarrow$ distanța dintre plăci.

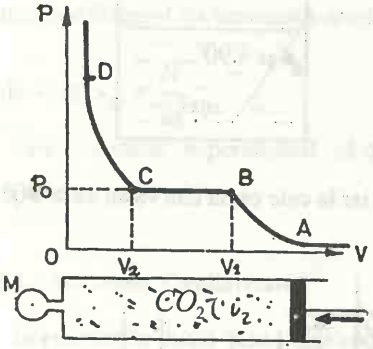
Capitolul 7. Transformări de fază

7.1 Transformările lui Andrews.



Izotermele lui Andrews sunt o familie de curbe trasate în cazul CO_2 (gaz real) și au reprezentarea:

Graficul unei izoterme Andrews:



Curba punctată A_1, B_1, C, B_2 şi A_2 se mai numeşte curba de saturaţie. Izoterma trasată pentru temperatura $31,1^oC$ se numeşte izoterma critică. Punctul C se numeşte punct critic şi se caracterizează în cazul CO_2 prin: $t_c = 31,1^oC$, printr-o presiune p_c şi un volum V_c.

Curba de saturaţie şi izoterma critică delimitează zone: I,III,IV monofazice şi II bifazică.

În zona I substanţa se găseşte în stare lichidă; în zona II substanţa se găseşte sub forma de vapori saturaţi şi lichid, în zona III substanţa se găseşte sub formă de vapori nesaturaţi şi în zona IV substanţa se găseşte sub formă de gaz.

- La o anumită temperatură, energia internă a unui gaz real este mai mică decât a gazului ideal.

Căldura latentă de lichefiere este o măsură a energiei de legătură a moleculelor în lichid. Formula de definiţie a căldurii latente specifice de lichefiere este: $\lambda_l = \frac{Q}{m}$ unde $< \lambda_l >_{SI} = \frac{j}{kg}$.

Lichefiere: trecerea unui gaz în mod izoterm în lichid.

Pe baza temperaturii critice substanţele se împart în vapori şi gaze. Dacă temperatura substanţei este mai mare decât temperatura critică, substanţa se găseşte sub formă de gaz, dacă se găseşte sub temperatura critică, substanţa se află sub formă de vapori.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

7.2. Vaporizare şi condensare.

Vaporizare: procesul de trecere a unei substanţe în fază gazoasă (fază de vapori) . Vaporizarea (fierberea) are loc cu absorbţie de căldură.

Căldura latentă de vaporizare constituie o măsură a variaţiei energiei interne de legătură a moleculelor.

Formula de definiţie a căldurii latente specifice de vaporizare este :

$\lambda_v = \frac{Q}{m}$ unde $< \lambda_v >_{SI} = \frac{j}{kg}$.

Vaporizarea poate avea loc în volum limitat sau în volum nelimitat.

Vaporizarea în volum limitat se poate face în vid sau în atmosferă gazoasă, iar în volum, nelimitat se poate face de la suprafaţa lichidului (evaporare) sau din toată masa lichidului (fierberea).

Vaporizarea în vid se face instantaneu şi are loc când presiunea vaporilor obţinuţi atinge o valoare maximă p_m. În acest caz vaporii se numesc saturanţi şi au următoarele proprietăţi:

- presiunea vaporilor saturaţi nu depinde de masa lichidului şi nici de masa vaporilor în contact;
- presiunea vaporilor saturaţi rămâne constantă, atâta timp cât temperatura rămâne constantă;
- la o temperatură dată presiunea maximă a vaporilor depinde numai de natura lichidului din care au provenit.

Vaporizarea în atmosfera gazoasă este lentă.

- Vaporizarea la suprafaţă (evaporare) se produce în anumite condiţii: presiunea p_1 a vaporilor aflaţi în atmosfera ambiantă, la temperatura mediului, trebuire să fir mai mică decât p_m a vaporilor lichidului la acea temperatură ($p_1 < p_m$) şi presiunea atmosferică H trebuie să fie mai mare decât p_m a vaporilor la temperatura lichidului ($H > p_m$).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deci, pentru a avea loc evaporarea, trebuiesc îndeplinite condiţiile : $p_1 < p_m$ şi $H > p_m$ la temperatura mediului la care are loc fenomenul.

Viteza de evaporare se află cu formula:

$$v = K\frac{S(p_m - p_1)}{H}$$ unde:

$S \rightarrow$ suprafaţa liberă a lichidului

$p_m \rightarrow$ presiunea maximă a vaporilor la temperatura la care are loc evaporarea

$p_1 \rightarrow$ presiunea vaporilor aflaţi în atmosfera ambiantă unde are loc fenomenul de evaporare

$H \rightarrow$ presiunea atmosferică

$K \rightarrow$ o constantă ce depinde de unităţile de măsurare alese pentru mărimile fizice din formula vitezei de evaporare şi vitezei aerului în contact cu lichidul.

Vaporizarea în toată masa lichidului (fierberea) are loc numai cu absorbţie de căldură .

Legile fierberii:

1. Temperatura de fierbere este constantă în imediata vecinătate a lichidului
2. Un lichid începe să fiarbă, atunci când presiunea maximă a vaporilor săi este egală cu presiunea de deasupra lichidului.

Condensarea este procesul invers vaporizării.

În timpul condensării substanţa cedează căldura mediului exterior.

Căldura latentă de condensare are aceiaşi semnificaţie ca cea a căldurii latente de vaporizare.

7.3. Topirea şi solidificarea.

Topirea este procesul de trecere a unei substanţe din starea solidă în starea lichidă prin absorbţie de căldură.

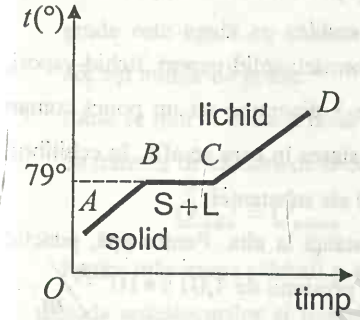
BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Formula de definiție a căldurii latente specifice de topire : $\lambda_t = \frac{Q}{m}$,

unde $< \lambda_t >_{SI} = \frac{j}{kg}$.

Prin căldură latentă specifică de topire înțelegem cantitatea de căldură necesară pentru topirea unui kg de substanță la temperatura de topire.

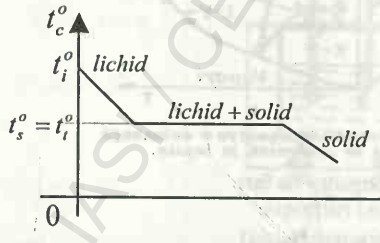
Graficul variației temperaturii în funcție de timpul de încălzire a unei substanțe (naftalina):



Pentru topire: $Q_p = Q_i + Q_l$ unde

$Q_i = mc(t_t^0 - t_i^0)$ și $Q_l = m\lambda_t$

Solidificarea este procesul invers topirii adică trecerea substanței din starea lichidă în starea solidă. Procesul de solidificare se face cu cedare de căldură mediului extern.



$Q_c = Q_r + Q_s =$

$= mc_l(t_i^o - t_s^0) + m\lambda_s$

Pentru aceiași substanță, cristalină, $\lambda_t = \lambda_s$,

$t_t^o = t_s^0$ și $Q_t = Q_s$

Legile topirii și solidificării:

- Fiecare substanță cristalină are o anumită temperatură de topire și solidificare, dacă presiunea este aceiași .

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- În timpul topirii (solidificării), temperatura rămâne constantă dacă presiunea este aceiaşi
- Temperatura de solidificare este egală cu temperatura de topire pentru aceiaşi substanţă cristalină.

7.4 Sublimarea şi desublimarea:

Sublimarea reprezintă procesul de trecere a unei substanţe din stare solidă în stare de gaz (vapori) cu absorbţie de căldură.

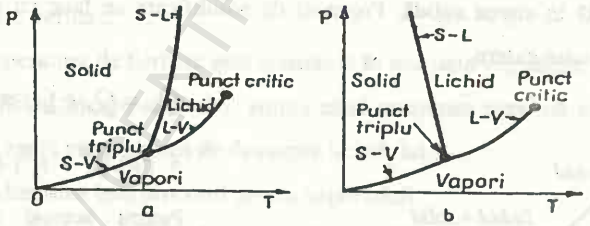
Desublimarea este procesul invers sublimării adică a trecerii substanţei din stare gazoasă (vapori) în stare solidă cu degajare de căldură.

7.5 Starea triplă a substanţei.

Se reprezintă cele trei perechi de transformări: solid-vapori, lichid-vapori, lichid-solid pe aceiaşi diagramă p-T. >Cele 3 diagrame au un punct comun numit punct triplu. Punctul triplu reprezintă starea în care se află, în echilibru, toate cele trei faze (solidă, lichidă şi gazoasă) ale substanţei.

Punctul triplu este diferit de la o substanţă la alta. Pentru apă, punctul triplu corespunde temperaturii de 273,16K şi presiunii de $1{,}013 \bullet 10^5 \, N/m^2$.

Există substanţe numite polimorfe care au mai multe puncte triple.



Starea de echilibru a celor trei faze pentru o substanţă care: *a)* se dilată la topire; *b)* se contractă la topire.

Schema transformarilor de faza

BCU IAŞI – CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

7.6. Calorimetria.

Se ocupă cu măsurarea căldurii şi a căldurilor specifice ale substanţelor.

La baza măsurătorilor calorimetrice stau trei consecinţe ale echilibrului termic şi a principiului I al termodinamicii :

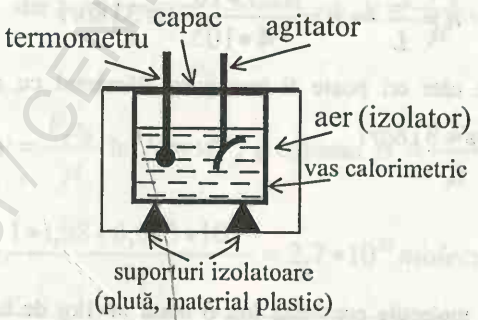
1. Într-un sistem izolat, format din corpuri cu temperaturi diferite şi în contact, după un interval de timp, toate corpurile ajung la aceiaşi temperatură. Corpurile mai calde cedează căldura, iar cele mai reci primesc căldură.
2. Căldura primită de un corp pentru a-şi mări temperatura cu un număr de grade este egală cu căldura cedată de celălalt corp pentru a se răci cu acelaşi număr de grade.
3. Când se pun în contact două corpuri cu temperaturi diferite, se va produce cu transfer de căldură de la corpul mai cald de cel mai rece.

$$Q_{cedat} = Q_{primit}$$ (ecuaţia calorimetrică)

Pentru măsurarea căldurii şi a căldurilor specifice se folosesc:

- metoda amestecurilor şi metoda bazată pe schimbarea stării de agregare a substanţelor.

Schema calorimetrului:



Calorimetrul nu ajută la determinarea căldurii specifice a unei substanţe .

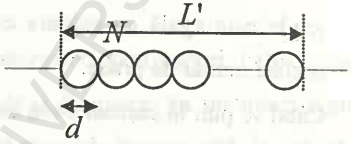
Are la bază ecuaţia calorimetrică: $Q_c = Q_p$

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se calculeze lungimea unui „lanţ'' ce s-ar obţine dacă moleculele conţinute de o masă m=1mg de apă sunt aşezate în linie una în contact cu alta (molecule sferice). De câte ori poate fi înconjurat Pământul pe la ecuator cu acest „lanţ'' molecular? Diametrul moleculei de apă $d = 3{,}8 \bullet 10^{-10} m$, lungimea cercului ecuatorial $L = 4 \bullet 10^{7} m$. (Fizica clasa X pag.9)

Rezolvare:

$$\mu_{apă} = 2 \bullet 1 + 16 = 18 \, {kg}/{kmol}$$



$$L' = Nd = \nu N_A d = \frac{m}{\mu} N_A d$$

Lungimea lanţului de molecule va fi : $L' = \frac{m}{\mu} N_A d$

Numeric: $L' = \frac{10^{-6} \bullet 6{,}023 \bullet 10^{26} \bullet 3{,}8 \bullet 10^{-10}}{18} = 1{,}27 \bullet 10^{10} m$

$$n = \frac{L'}{L} \rightarrow n = \frac{1{,}27 \bullet 10^{10}}{4 \bullet 10^{7}} \cong 318 ori$$

Numărul de câte ori poate fi înconjurat Pământul cu acest „lanţ'' de molecule este : $n = 318 ori$

2. Să se afle:

a) numărul de molecule conţinute într-o masă m=1kg de bioxid de carbon (CO_2);

b) masa unei molecule de (CO_2);

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) numărul de molecule conţinute într-un volum $V = 1m^3$ de CO_2, aflat în codiţii fizice normale ($\rho_0 = 1{,}98 kg/m^3$);

d) distanţa medie dintre moleculele CO_2, aflat în condiţii fizice normale ($N_A = 6{,}023 \bullet 10^{26}\ molecule/m^3$)

(Culegere Hristiev pag.127/ ed. 1983)

Rezolvare:

a) $N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A \rightarrow$

$\mu_{CO_2} = \mu_C + \mu_{O_2} = 12 + 2 \bullet 16 = 44 kg/kmol$

Numeric: $N = \frac{1}{44} \bullet 6{,}023 \bullet 10^{26} = 1{,}37 \bullet 10^{25}\ molecule \rightarrow$

$\rightarrow N = 1{,}37 \bullet 10^{25}\ molecule$

b) $m_{CO_2} = \frac{\mu_{CO_2}}{N_A}$. Numeric: $m_{CO_2} = \frac{44}{6{,}023 \bullet 10^{26}} = 7{,}3 \bullet 10^{-26} Kg$

c) $N = \nu N_A$, dar $\nu = \frac{V}{V_{\mu_0}} = \frac{V}{\frac{\mu}{\rho_0}} = \frac{V\rho_0}{\mu} \rightarrow \nu = \frac{V\rho_0}{\mu}$.

Substituim pe $\nu = \frac{V\rho_0}{\mu}$ în $N = \nu N_A$ şi obţinem $N = \frac{V\rho_0}{\mu} N_A$.

Numeric: $N = \frac{1 \bullet 1{,}98 \bullet 6{,}023 \bullet 10^{26}}{44} = 2{,}7 \bullet 10^{25}\ molecule$.

d) $d = \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A \rho_0}}$ Numeric: $d = \sqrt{\frac{44}{6{,}023 \bullet 10^{26} \bullet 1{,}98}} = 3{,}3 \bullet 10^{-9} m$.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3. Să se afle:

a) masa unei molecule de amoniac (NH_3)

b) densitatea amoniacului gazos (NH_3), aflat în condiții fizice normale ($N_A = 6{,}023 \bullet 10^{26} \frac{molecule}{kmol}$, $V_{\mu 0} = 22{,}42 \frac{m^3}{kmol}$) (Culegere Hristiev pag.127/ ed. 1983).

Rezolvare:

a) $m_{NH_3} = \frac{\mu}{N_A}$ unde :

$$\mu_{NH_3} = \mu_N + \mu_{H_3} = 14 + 3 \bullet 1 = 17 \frac{kg}{kmol} \rightarrow \mu_{NH_3} = 17 \frac{kg}{kmol}$$

$$m_{NH_3} = \frac{\mu_{NH_3}}{N_A} = \frac{17}{6{,}023 \bullet 10^{26}} = 2{,}7 \bullet 10^{-26} kg$$

b) $\rho_0 = \frac{\mu}{V_{\mu_0}} \rightarrow \quad \rho_0 = \frac{17}{22{,}42} = 0{,}754 kg/m^3$.

4. Se consideră un gaz de masă molară μ, din care o fracțiune K disociază în atomi. Cunoscând că o moleculă este formată din n atomi care este masa molară medie a amestecului din atomi şi molecule nedisociate? (Teste medicină Iaşi pag.12 /1997).

Rezolvare:

Înainte de disociere: $\nu = \frac{m}{\mu}$ şi după disociere : $\nu' = \frac{m}{\mu'}$.

Facem raportul : $\frac{\nu}{\nu'} = \frac{m}{\mu} \frac{\mu'}{m} = \frac{\mu'}{\mu} \rightarrow \mu' = \frac{\nu \mu}{\nu'}$ Aflarea lui ν'.

Cum fiecare moleculă conține n atomi şi în amestec avem ν, atunci $k\nu n$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

reprezintă fracțiunea de kmoli disociate iar $\nu - k\nu$ constituie numărul de kmoli de molecule rămase nedisociate, încât în starea finală vom scrie:

$$\nu' = k\nu n + (\nu - k\nu) = \nu(kn + 1 - k) = \nu[k(n-1)+1].$$

Cunoscând pe $\nu' = \nu[k(n-1)+1]$ și substituind în $\mu' = \frac{\nu\mu}{\nu'}$ obținem:

$$\mu' = \frac{\nu\mu}{\nu[k(n-1)+1]} = \frac{\mu}{k(n-1)+1} \rightarrow \quad \mu' = \frac{\mu}{k(n-1)+1}.$$

Masa molară medie a amestecului este:

$$\mu' = \frac{\mu}{k(n-1)+1}$$

5. Într-un vas se află un amestec de două gaze de mase egale. Gazele au masele molare μ_1 și μ_2. Care este masa molară medie a amestecului? (Teste, Medicină Iași pag.11 / ed. 1997)

Rezolvare:

În amestec avem: $\nu = \nu_1 + \nu_2 \rightarrow \quad \frac{m_1 + m_2}{\mu} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}$. Cum $m_1 = m_2 = m$ obținem: $\frac{2m}{\mu} = \frac{m}{\mu_1} + \frac{m}{\mu_2} \rightarrow \frac{2}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \rightarrow$

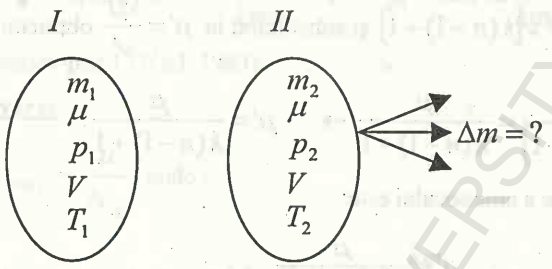
$$\rightarrow \frac{2}{\mu} = \frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_1\mu_2} \rightarrow \quad \mu = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

Masa moleculară a amestecului va fi: $\mu = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6. Într-o butelie cu volumul V se află oxigen la presiune p_1 şi temperatura T_1. Se consumă oxigen până când presiunea devine p_2 şi temperatura T_2. Care este masa oxigenului consumat? (Teste, Medicină Iaşi, pag.22 /1997)

Rezolvare:



$\Delta m = m_1 - m_2$ Dar: $p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT_1 \rightarrow m_1 = \frac{p_1 V \mu}{RT_1}$ şi

în mod analog aflăm pe $m_2 = \frac{p_2 V \mu}{RT_2}$, încât:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{p_1 V \mu}{RT_1} - \frac{p_2 V \mu}{RT_2} = \frac{V\mu}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \rightarrow \Delta m = \frac{\mu V (T_2 - T_1)}{RT_1 T_2}.$$

Masa de oxigen consumată va fi: $\Delta m = \frac{\mu V (T_2 - T_1)}{RT_1 T_2}$.

7. La mijlocul unui tub subţire de sticlă, aşezat orizontal, închis la ambele capete, de lungime l se află o coloană de mercur de lungime h.

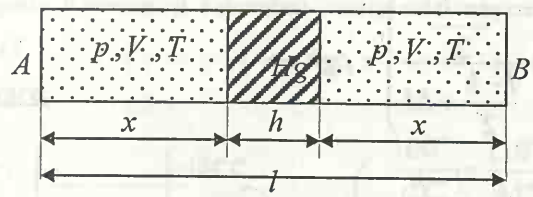
Când tubul este aşezat vertical, coloana de mercur se deplasează pe lungimea Δh. Să se afle presiunea din tub în poziţie orizontală?

(Fizica clasa a X-a, pag.40)

Rezolvare:

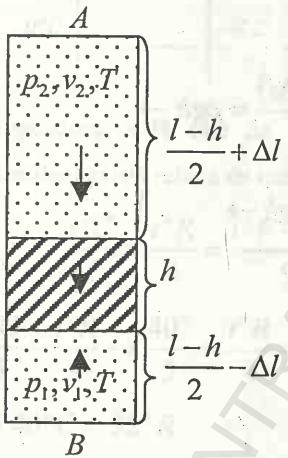
Starea I. Tubul în poziţie orizontală:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Din desen se vede : $2x+h=l \rightarrow x=\dfrac{l-h}{2}$

Starea II: aducem tubul în poziție verticală:



Când tubul a trecut în poziția verticală gazul din ambele compartimente a suferit fiecare o transformare izotermă:

$pV = p_1V_1 \rightarrow p_1 = p\dfrac{V_1}{V}$ și

$pV_2 = p_2V_2 \rightarrow p_2 = p\dfrac{V_2}{V}$

Volumele: $V_1 = S\left(\dfrac{l-h}{2}-\Delta l\right)$,

$V_2 = S\left(\dfrac{l-h}{2}+\Delta l\right)$ și $V = S\dfrac{l-h}{2}$

Substituid pe V_1, V_2 și V în relațiile lui p_1 și p_2, obținem :

$$p_1 = p\frac{\dfrac{l-h}{2}}{\dfrac{l-h}{2}-\Delta l} \text{ și } p_2 = p\frac{\dfrac{l-h}{2}}{\dfrac{l-h}{2}+\Delta l}.$$

Cum $p_1 = \rho gh + p_2$ avem : $p_1 - p_2 = \rho gh \rightarrow$

$$\rightarrow p\frac{\dfrac{l-h}{2}}{\dfrac{l-h}{2}-\Delta l} - p\frac{\dfrac{l-h}{2}}{\dfrac{l-h}{2}+\Delta l} = \rho gh \rightarrow$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow p\left(\frac{\frac{l-h}{2}}{\frac{l-h}{2}-\Delta l}-\frac{\frac{l-h}{2}}{\frac{l-h}{2}+\Delta l}\right)=\rho gh\rightarrow$$

$$\rightarrow p\left(\frac{\frac{l-h}{2}}{\frac{l-h-2\Delta l}{2}}-\frac{\frac{l-h}{2}}{\frac{l-h+2\Delta l}{2}}\right)=\rho gh\rightarrow$$

$$\rightarrow p\left(\frac{l-h}{l-h-2\Delta l}-\frac{l-h}{l-h+2\Delta l}\right)=\rho gh\rightarrow$$

$$\rightarrow p\frac{(l-h)(l-h+2\Delta l)-(l-h)(l-h-2\Delta l)}{(l-h-2\Delta l)(l-h+2\Delta l)}=\rho gh\rightarrow$$

$$\rightarrow p\frac{(l-h)(l-h+2\Delta l-l+h+2\Delta l)}{(l-h-2\Delta l)(l-h+2\Delta l)}=\rho gh\rightarrow$$

$$\rightarrow p\frac{(l-h)4\Delta l}{(l-h-2\Delta l)(l-h+2\Delta l)}=\rho gh\rightarrow$$

$$\rightarrow p=\rho gh\frac{(l-h-2\Delta l)(l-h+2\Delta l)}{(l-h)4\Delta l}=$$

$$=\rho gh\frac{4\left(\frac{l-h}{2}-\Delta l\right)\left(\frac{l-h}{2}+\Delta l\right)}{(l-h)4\Delta l}\rightarrow$$

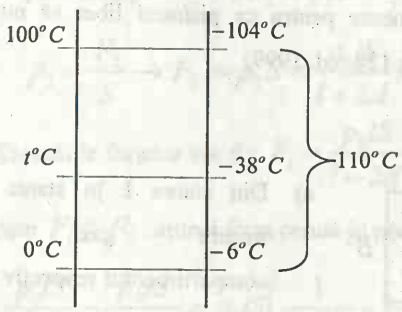
$$\rightarrow p=\rho gh\frac{\left(\frac{l-h}{2}-\Delta l\right)\left(\frac{l-h}{2}+\Delta l\right)}{(l-h)\Delta l}.$$

8. Un termometru cu mercur, greşit etalonat introdus în gheaţă care se topeşte indică $-6^{o}C$, iar în apa care fierbe la presiune atmosferică normală indică $104^{o}C$. Care va fi temperatura reală când acest termometru indică $-38^{o}C$?

BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Câte grade Rèaumur şi Fahrenheit corespunde temperaturii aflate în grade Celsius ?

Rezolvare:



$$\frac{100^o}{t^oC}=\frac{110^o}{44^o}$$

$$t^oC=\frac{44^o\bullet 100^o}{110^o}=40^oC$$

$$t^oC=40^oC$$

Temperatura reală este de 40^oC. Între gradele Celsius, Rèaumur şi Fahrenheit există relaţia de transformare:

$$\frac{t^oC}{5}=\frac{t^oR}{4}=\frac{t^oF-32^o}{9}$$

$$\frac{t^oC}{5}=\frac{t^oR}{4}\rightarrow\frac{40^o}{5}=\frac{t^oR}{4}\rightarrow\frac{160^o}{5}=t^oR\rightarrow t^oR=32^oC\rightarrow$$

$$\rightarrow 40^oC=32^oR$$

$$\frac{t^oC}{5}=\frac{t^oF-32^o}{9}\rightarrow\frac{40^oC}{5}=\frac{t^oF-32^o}{9}\rightarrow$$

$$\rightarrow 72^o+32^o=t^oF\rightarrow\quad 40^oC=104^oF$$

Temperaturile cerute în problemă sunt: $40^oC,32^oR,104^oF$

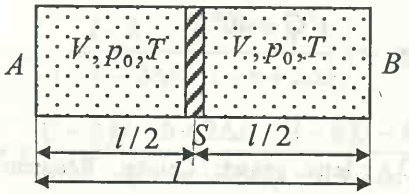
9. Într-un cilindru de lungime l şi secţiune S, închis la ambele capete şi umplut cu oxigen (de masă moleculară μ), se află un piston mobil. Pistonul se găseşte la mijlocul cilindrului, gazul aflat în cele două compartimente fiind la temperatura T_0 şi presiunea atmosferică p_0. În urma deplasării pistonului cu

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

distanţa d faţă de situaţia iniţială, să se determine: presiunea gazului (p_1, p_2) din fiecare compartiment, forţa F ce trebuie să acţioneze asupra pistonului pentru a-l menţine în noua poziţie şi masa Δm de oxigen ce trebuie scoasă dintr-unul din cele două compartimente pentru ca pistonul liber să nu se deplaseze. (Teste , Medicină Iaşi, pag.128 /ed. 1999)

Rezolvare:

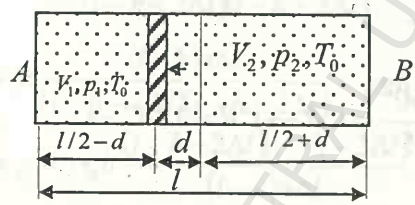
I



a) Din starea I]n starea II, fiecare gaz din compartimentul respectiv are o transformare izotermă:

$$p_0V = p_1V_1 \text{ şi } p_0V = p_2V_2$$

II



Calculăm volumele:

$$V = S\frac{l}{2},\ V_1 = S\left(\frac{l}{2}-d\right) \text{ şi}$$

$$V_2 = S\left(\frac{l}{2}+d\right)$$

Aceste volume V_1, V_2 şi V le substituim în relaţiile de mai sus şi obţinem:

$$\rightarrow p_0 S\frac{l}{2} = p_1 S\left(\frac{l}{2}-d\right) \text{ şi } p_0 S\frac{l}{2} = p_2 S\left(\frac{l}{2}+d\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow p_0\frac{l}{2} = p_1\left(\frac{l}{2}-d\right) \text{ şi } p_0\frac{l}{2} = p_2\left(\frac{l}{2}+d\right) \rightarrow$$

$$p_1 = \frac{p_0\frac{l}{2}}{\frac{l}{2}-d} = \frac{\frac{p_0 l}{2}}{\frac{l-2d}{2}} = p_0\frac{l}{l-2d} \text{ şi } p_2 = p_0\frac{l}{l+2d}.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Presiunile aflate în starea II sunt: $p_1 = p_0 \frac{l}{l-2d}$ şi $p_2 = p_0 \frac{l}{l+2d}$

b) Ştim că $p_1 = \frac{F_1}{S} \rightarrow F_1 = p_1 S = \frac{p_0 lS}{l-2d}$ şi

$p_2 = \frac{F_2}{S} \rightarrow F_2 = p_2 S = \frac{p_0 lS}{l+2d}$.

Expresiile forţelor vor fi : $F_1 = \frac{p_0 lS}{l-2d}$ şi $F_2 = \frac{p_0 lS}{l+2d}$

Cum $F_1 > F_2$, atunci forţa cerută în problemă va fi $F = F_1 - F_2 =$

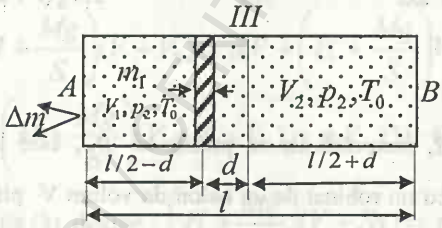
$$= \frac{p_0 lS}{l-2d} - \frac{p_0 lS}{l+2d} = p_0 lS\left(\frac{1}{l-2d} - \frac{1}{l+2d}\right) = p_0 lS\left(\frac{l+2d-l+2d}{l^2-4d^2}\right) =$$

$$= p_0 lS\left(\frac{4d}{l^2-4d^2}\right) = \frac{4p_0 ldS}{l^2-4d^2}$$

Formula forţei ce trebuie acţionat ca pistonul să fie în echilibru este :

$$F = \frac{4p_0 ldS}{l^2-4d^2}$$

c) Aflarea masei Δm, ce trebuie scoasă din compartimentul A starea II pentru ca pistonul lăsat liber să nu se deplaseze.



$\Delta m = m - m_1$

$m \rightarrow$ masa de gaz din compartimentul A din starea II iar m_1 este masa de gaz rămasă în compartimentul A după ce Δm a părăsit compartimentul A:

Vom putea scrie pentru m :

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_0 \rightarrow \quad m = \frac{p_1 V_1 \mu}{RT_0} = \frac{\mu}{RT_0} \frac{p_0 l}{l-2d} S \frac{l-2d}{2} =$$

$$= \frac{\mu p_0 Sl}{2RT_0} \rightarrow \qquad m = \frac{\mu p_0 Sl}{2RT_0} \rightarrow$$

În mod analog vom scrie pentru m_1:

$$p_2 V_1 = \frac{m_1 RT_0}{\mu} \rightarrow \quad m_1 = \frac{p_2 V_1 \mu}{RT_0} = \frac{\mu}{RT_0} \frac{p_0 l}{l+2d} S \frac{l-2d}{2} =$$

$$= \frac{\mu p_0 lS}{2RT_0} \frac{l-2d}{l+2d} \rightarrow \quad m_1 = \frac{\mu p_0 lS}{2RT_0} \frac{l-2d}{l+2d} \rightarrow$$

$$\Delta m = m - m_1 = \frac{\mu p_0 lS}{2RT_0} - \frac{\mu p_0 lS}{2RT_0} \frac{l-2d}{l+2d} = \frac{\mu p_0 lS}{2RT_0} \left(1 - \frac{l-2d}{l+2d}\right) =$$

$$= \frac{\mu p_0 lS}{2RT_0} \left(\frac{l+2d-l+2d}{l+2d}\right) = \frac{\mu p_0 lS}{2RT_0} \left(\frac{4d}{l+2d}\right) = \frac{2\mu p_0 lSd}{RT_0(l+2d)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta m = \frac{2\mu p_0 lSd}{RT_0(l+2d)}$$

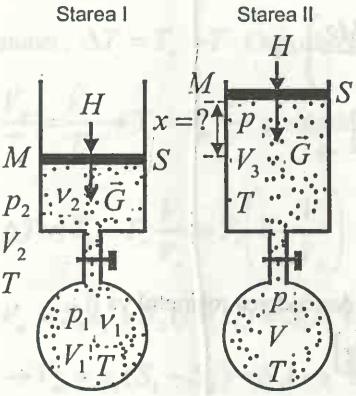
Răspunsurile cerute de problemă sunt:

$$p_1 = p_0 \frac{l}{l-2d}\ ; p_2 = p_0 \frac{l}{l+2d}; F = \frac{4p_0 ldS}{l^2 - 4d^2} \text{ şi } \Delta m = \frac{2\mu p_0 lSd}{RT_0(l+2d)}$$

10. Un cilindru de secţiune S, conţinâd aer la presiunea p_2, este legat, printr-un tub subţire, prevăzut cu un robinet de un balon de volum V plin cu aer la presiunea $p_1 > p_2$. Cilindrul este prevăzut cu un piston de masă M care se poate mişca fără frâne. Cunoscâd presiunea atmosferică H, distaţa x pe care se deplasează pistonul la deschiderea robinetului este: (Test, Medicină Iaşi, pag 130/ ed.1999).

Rezolvare:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Pentru starea II:

$$p(V+V_3)=(\nu_1+\nu_2)RT \quad (1)$$

Necunoscute sunt ν_1 și ν_2 pe care-i aflăm din starea I:

$$p_1V=\nu_1RT \rightarrow \nu_1=\frac{p_1V}{RT} \text{ și}$$

$$p_2V_2=\nu_2RT \rightarrow \nu_2=\frac{p_2V_2}{RT}.$$

Mărimile fizice ν_1 și ν_2 le substituim în (1) și obținem :

$$p(V+V_3)=\left(\frac{p_1V}{RT}+\frac{p_2V_2}{RT}\right)RT \rightarrow \quad p(V+V_3)=(p_1V+p_2V_2) \quad (2)$$

Dar în starea I: $p_2=H+\frac{Mg}{S}$ și în starea II: $p=H+\frac{Mg}{S}$ și atunci substituind pe p_2 și p în relația (2) obținem:

$$\left(H+\frac{Mg}{S}\right)(V+V_3)=p_1V+\left(H+\frac{Mg}{S}\right)V_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow\left(H+\frac{Mg}{S}\right)(V+V_3-V_2)=p_1V \quad (3), \text{ Cum } (V_3-V_2)=Sx, \text{ atunci}$$

relația (3) devine : $\left(H+\frac{Mg}{S}\right)(V+Sx)=p_1V \rightarrow$

$$\rightarrow\left(H+\frac{Mg}{S}\right)V+\left(H+\frac{Mg}{S}\right)Sx=p_1V \rightarrow$$

$$\rightarrow\left(H+\frac{Mg}{S}\right)Sx=V\left(p_1-H-\frac{Mg}{S}\right) \rightarrow$$

BCU MSU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow \left(\frac{HS+Mg}{S}\right)Sx = V\left(\frac{(p_1-H)S-Mg}{S}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow (HS+Mg)x = \frac{V[(p_1-H)S-Mg]}{S} \rightarrow$$

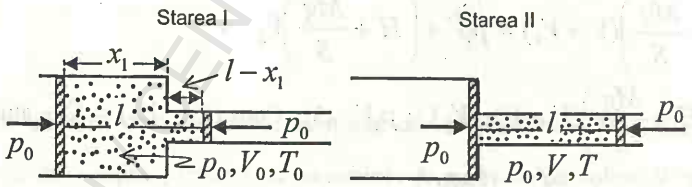
$$\rightarrow x = \frac{V[(p_1-H)S-Mg]}{S(HS+Mg)}.$$

Distanța x pe care se deplasează pistonul la deschiderea robinetul va fi :

$$x = \frac{V[(p_1-H)S-Mg]}{S(HS+Mg)}$$

11. Se consideră un cilindru de forma celui din figură, în care se pot deplasa fără frecare două pistoane cu secțiunile S_1 și S_2 legate solidar printr-o tijă de lungime l. Știind că temperatura inițială este T_0, să se calculeze variația ΔT de temperatură astfel încât gazul aflat între cele două pistoane să ocupe un volum minim posibil. (Teste, Medicină Iași , pag130 / 1999)

Rezolvare:



Din starea I în starea II, gazul suferă o răcire izobară, deoarece a trecut de la un volum mare, la un volum minim ceea ce vom putea scrie:

$\frac{p_o V_o}{T_o} = \frac{p_o V}{T} \rightarrow \frac{V_o}{T_o} = \frac{V}{T}$ Întrucât avem o comprimare izobară $T_o > T$ și

atunci , $\Delta T = T_o - T$. Cum din relaţia transformării izobare:

$\frac{V_o}{T_o} = \frac{V}{T} \rightarrow T = T_o \frac{V}{V_o}$ şi substituind în $\Delta T = T_o - T$ obţinem:

$\Delta T = T_o - T_o \frac{V}{V_o} = T_o\left(1 - \frac{V}{V_o}\right)$. Trebuiesc calculate V_o şi V .

$V_o = S_1 x_1 + S_2(l - x_1) = S_1 x_1 + S_2 l - S_2 x_1 = x_1(S_1 - S_2) + S_2 l \rightarrow$

$\rightarrow V_o = x_1(S_1 - S_2) + S_2 l \rightarrow$ iar $V = S_2 l$

Cunoscând expresiile V_o şi V , le introducem în relaţia : $\Delta T = T_o\left(1 - \frac{V}{V_o}\right)$

şi găsim : $\Delta T = T_o\left(1 - \frac{S_2 l}{x_1(S_1 - S_2) + S_2 l}\right) = T_o\left(\frac{x_1(S_1 - S_2) + S_2 l - S_2 l}{x_1(S_1 - S_2) + S_2 l}\right) =$

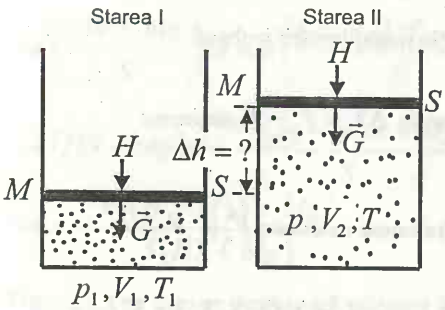
$= \frac{T_o x_1(S_1 - S_2)}{x_1(S_1 - S_2) + S_2 l}$. Variaţia de temperatură ΔT va fi:

$$\Delta T = \frac{T_o x_1(S_1 - S_2)}{x_1(S_1 - S_2) + S_2 l}$$

12. O masă m de gaz, cu masa molară μ , se află într-u cilindru cu piston care are secţiunea S şi masa M . Gazul este încălzit, izobar până la temperatura T . În urma deplasării pistonului, energia sa potenţială a crescut cu ΔE_p . Cunoscând presiunea atmosferică H şi constanta R , volumul iniţial ocupat de gaz este :

(Teste , Medicină Iaşi , pag130 /1999)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



În timpul ridicării pistonul cu Δh are loc o variație a energiei potențiale gravitaționale:

$\Delta E_p = Mg\Delta h$ (1) Cum

$\Delta V = S\Delta h \rightarrow \Delta h = \frac{\Delta V}{S}$

încât relația (1) devine: $\Delta E_p = Mg\frac{\Delta V}{S} \rightarrow \Delta V = \frac{S\Delta E_p}{Mg}$ (2)

La trecerea gazului din starea I în starea II, gazul suferă o transformare izobară și putem scrie:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T} \rightarrow \frac{T}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} \rightarrow \frac{T - T_1}{T_1} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} \rightarrow \frac{T}{T_1} - 1 = \frac{\Delta V}{V_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta V = V_1\left(\frac{T}{T_1} - 1\right) \text{ (3). Relația (3) o substituim în (2) și obținem:}$$

$$V_1\left(\frac{T}{T_1} - 1\right) = \frac{S\Delta E_p}{Mg} \text{ (4). În starea I: } pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow T_1 = \frac{pV_1\mu}{mR} \text{ pe care o introducem în relația (4) și căpătăm :}$$

$$V_1\left(\frac{mRT}{pV_1\mu} - 1\right) = \frac{S\Delta E_p}{Mg} \rightarrow \frac{mRT}{p\mu} - V_1 = \frac{S\Delta E_p}{Mg} \rightarrow$$

$V_1 = \frac{mRT}{p\mu} - \frac{S\Delta E_p}{mg}$. Cum $p = H + \frac{Mg}{S}$, găsim:

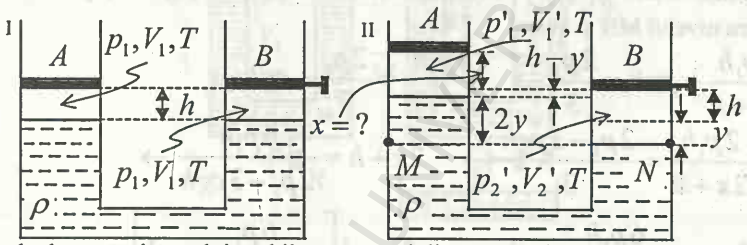
$$V_1 = \frac{mRT}{\mu\left(H + \frac{Mg}{S}\right)} - \frac{S\Delta E_p}{Mg}.$$

BUCUREȘTI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

13. Se consideră două tuburi comunicante identice, umplute parţial cu un lichid de densitate ρ. Coloanele de aer cu înălţimea h sunt separate de exterior cu două pistoane de masă neglijabilă. Un piston se blochează, iar celălalt se ridică pe o înălţime x. Cunoscând presiunea atmosferică H şi temperatura constantă, valoarea lui x pentru ca diferenţa de înălţime a lichidului în cele două tuburi va fi egală cu h, se calculează din :

(Teste , Medicină Iaşi , pag 129/ 1999)

Rezolvare:



La deplasarea pistonului mobil cu x, gazul din compartimentul B cât şi cel din A efectuează fiecare, câte o transformare izotermă, din starea I în starea II, ceea ce putem scrie:

$$p_1V_1 = p_1'V_1' \text{ şi } p_1V_1 = p_2'V_2' \text{ unde:}$$

$V_1 = Sh$, $V_1' = S(x+h-y) \rightarrow V_2' = S(h+y)$. Substituim volumele V_1, V_1' şi V_2' în relaţiile de transformare din starea I în starea II şi obţinem:

$p_1Sh = p_1'S(x+h-y) \rightarrow \quad p_1h = p_1'(x+h-y)$ şi

$p_1Sh = p_2'S(h+y) \rightarrow \quad p_1h = p_2'(h+y)$

Avem relaţiile : $\begin{cases} p_1h = p_1'(x+h-y) \\ p_1h = p_2'(h+y) \end{cases}$

Din figură se vede că $y + y = h \rightarrow \quad 2y = h \rightarrow \quad y = \frac{h}{2}$, încât relaţiile de

mai sus de devin: $\begin{cases} p_1 h = p_1'(x + h - \frac{h}{2}) \\ p_1 h = p_2'(h + \frac{h}{2}) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 h = p_1'(x + \frac{h}{2}) \\ p_1 h = p_2'\left(\frac{3h}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1' = \frac{p_1 h}{x + \frac{h}{2}} = \frac{2p_1 h}{2x + h} \\ p_2' = \frac{2p_1}{3} \end{cases}$$

Mărimile fizice: p_1' şi p_2' le introducem în relaţia $p_1' + \rho g h = p_2'$ scrisă pentru nivelul MN şi avem:

$$\frac{2p_1 h}{2x + h} + \rho g h = \frac{2p_1}{3} \rightarrow \quad \frac{2p_1 h}{2x + h} = \frac{2p_1}{3} - \rho g h \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2p_1 h}{2x + h} = \frac{2p_1 - 3\rho g h}{3} \rightarrow \quad 2x + h = \frac{6p_1 h}{2p_1 - 3\rho g h} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x = \frac{6p_1 h}{2p_1 - 3\rho g h} - h \rightarrow \quad 2x = h\left[\frac{6p_1}{2p_1 - 3\rho g h} - 1\right] =$$

$$= \frac{h}{2} \bullet \frac{6p_1 - 2p_1 + 3\rho g h}{2p_1 - 3\rho g h} = \frac{h}{2} \bullet \frac{4p_1 + 3\rho g h}{2p_1 - 3\rho g h} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{h}{2} \bullet \frac{4p_1 + 3\rho g h}{2p_1 - 3\rho g h} \rightarrow x = h\frac{4p_1 + 3\rho g h}{2(2p_1 - 3\rho g h)}$$

Pistonul mobil s-a ridicat la înălţimea: $x = h\dfrac{4p_1 + 3\rho g h}{2(2p_1 - 3\rho g h)}$.

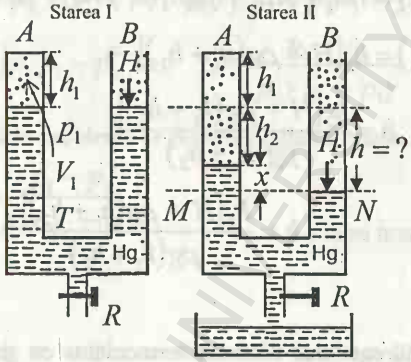
14. Se consideră un tub în formă de U, prevăzut cu un robinet, în care se află mercur la acelaşi nivel, iar în ramura stângă, închisă în partea superioară, se află o masă de gaz, ocupând o lungime h_1. Deschizând robinetul, nivelul mercurului în ramura deschisă coboară pe distanţa h, iar în cea închisă pe

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

distanța h_2, știind că densitatea mercurului este ρ și presiunea atmosferică H, distanța h este dată de:

(Teste , Medicină Iaşi, pag.129 /1999)

Rezolvare:



Deschizând robinetul R, presiunea gazului din ramura stângă scade , iar din ramura dreaptă rămâne constantă, ceea ce face ca mercurul din stânga să curgă mai încet decât cel din dreapta. La un anumit moment, mercurul din ramura stângă va fi în urmă cu distanța x, față de mercurul din ramura dreaptă, încât putem scrie relația: $h_2 + x = h$.

Gazul efectuează o transformare izotermă din starea I în starea II şi putem scrie: $p_1V_1 = p_2V_2$ unde $p_1 = H$, $V_1 = Sh_1$, $V_2 = S(h_1 + h_2)$, încât relația $p_1V_1 = p_2V_2$ devine: $HSh_1 = p_2S(h_1 + h_2) \rightarrow$

$$\rightarrow Hh_1 = p_2(h_1 + h_2) \quad (1)$$

La nivelul MN putem scrie: $p_2 + \rho gx = H \rightarrow \quad p_2 = H - \rho gx$. Dar x din relația $h_2 + x = h$ are valoarea $x = h - h_2$ şi substituită în $p_2 = H - \rho gx$

se obține $p_2 = H - \rho g(h - h_2)$. Înlocuind pe p_2 în relația (1) și obținem :

$$Hh_1 = [H - \rho g(h - h_2)][(h_1 + h_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow Hh_1 = H(h_1 + h_2) - \rho gh(h_1 + h_2) + \rho gh_2(h_1 + h_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho gh(h_1 + h_2) = H(h_1 + h_2) + \rho gh_2(h_1 + h_2) - Hh_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho gh(h_1 + h_2) = Hh_1 + Hh_2 + \rho gh_2(h_1 + h_2) - Hh_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho gh(h_1 + h_2) = h_2[H + \rho g(h_1 + h_2)] \rightarrow$$

$$h = \frac{h_2[H + \rho g(h_1 + h_2)]}{\rho g(h_1 + h_2)}$$

Deci rezultatul cerut este: $h = \frac{h_2[H + \rho g(h_1 + h_2)]}{\rho g(h_1 + h_2)}$.

15. Presiunea hidrogenului dintr-un termometru cu gaz la volum constant crește de la valoarea p_0 când temperatura este 0^0C, la valoarea p_1 când temperatura devine t_1. Cunoscând coeficienții de dilatare volumică a vasului γ și al hidrogenului γ_{H_2}, temperatura t_1 se poate calcula din relația:

(Teste , Medicină Iași, pag129 / 1999)

Rezolvare:

Folosim formula generală a gazelor ideale:

$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_1V_{vas}}{T_1}$ unde $V_{vas} = V_0(1 + \gamma t_1)$, încât $\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_1V_0(1 + \gamma t_1)}{T_1} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1(1 + \gamma t_1)}{T_1}$ (1). Dar $\alpha = \frac{1}{T_0} = \beta = \gamma_{H_2}$, iar

$T_1 = T_0 + t_1$, încât: $T_1 = \frac{1}{\gamma_{H_2}} + t_1$. Substituim pe $T_1 = \frac{1}{\gamma_{H_2}} + t_1$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în relaţia (1) şi obţinem : $\rightarrow \dfrac{p_0}{\dfrac{1}{\gamma_{H_2}}} = \dfrac{p_1(1+\gamma t_1)}{\dfrac{1}{\gamma_{H_2}}+t_1} \rightarrow$

$$\rightarrow p_0\gamma_{H_2} = \frac{p_1(1+\gamma t_1)\gamma_{H_2}}{1+\gamma_{H_2}t_1} \rightarrow \quad p_0\left(1+\gamma_{H_2}t_1\right) = p_1(1+\gamma t_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow p_0 + p_0\gamma_{H_2}t_1 = p_1 + p_1\gamma t_1 \rightarrow \quad p_0\gamma_{H_2}t_1 - p_1\gamma t_1 = p_1 - p_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow t_1\left(p_0\gamma_{H_2} - p_1\gamma\right) = p_1 - p_0 \rightarrow \quad t_1 = \frac{p_1 - p_0}{p_0\gamma_{H_2} - p_1\gamma}$$

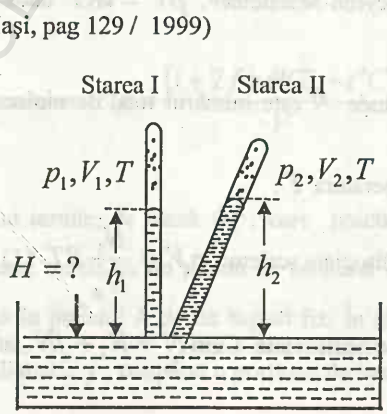
Temperatura t_1 cerută în problemă se poate calcula cu relaţia :

$$t_1 = \frac{p_1 - p_0}{p_0\gamma_{H_2} - p_1\gamma}$$

16. Un tub barometric se umple cu mercur de densitate ρ şi se cufundă cu capătul deschis într-un vas cu mercur. În timpul acestei operaţii, în camera barometrică a intrat puţin aer şi înălţimea coloanei de mercur din tub este h_1. Înclinând tubul astfel încât diferenţa dintre nivelul mercurului în vas şi în tub să fie h_2 ,volumului aerului închis în camera barometrică se micşorează de n ori. Presiunea atmosferică este dată de relaţia:

(Teste , Medicină Iaşi, pag 129 / 1999)

Rezolvare:



BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin înclinarea tubului barometric, aerul din starea I, în starea II suferă o transformare izotermă: $p_1V_1 = p_2V_2$ (1) unde $p_1 + \rho gh_1 = H$ şi $p_2 + \rho gh_2 = H$ din care $p_1 = H - \rho gh_1$ şi $p_2 = H - \rho gh_2$.

Relaţiile p_1 şi p_2 le substituim în (1) şi obţinem:

$$(H - \rho gh_1)V_1 = (H - \rho gh_2)\frac{V_1}{n} \rightarrow \quad n(H - \rho gh_1) = (H - \rho gh_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow nH - n\rho gh_1 = H - \rho gh_2 \rightarrow \qquad H(n-1) = \rho g(nh_1 - h_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow H = \frac{\rho g(nh_1 - h_2)}{n-1}.$$

Relaţia cerută în problemă este : $H = \frac{\rho g(nh_1 - h_2)}{n-1}$.

17. Un vas de volum V conţine ν kmoli de gaz ideal triatomic la temperatura t^0C. O fracţiune f din molecule disociază în atomi. Presiunea finală a gazului este: (Teste , Medicină Iaşi , pag132 / 1999)

Rezolvare:

Scriem ecuaţia Clapeyron-Mendeleev: $pV = \nu RT$ unde $\nu = \frac{N}{N_A}$ încât:

$pV = \frac{N}{N_A}RT$, unde N este numărul total de molecule din volumul V la presiunea p şi temperatura T.

Pentru molecule nedisociate scriem: $p_1V = \frac{N_1}{N_A}RT$ (1) , unde N_1 reprezintă numărul de molecule nedisociate. Cum $N = N_1 + fN$, atunci $N_1 = N - fN$,

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

încât relația (1) devine: $p_1V = \frac{N - fN}{N_A}RT \rightarrow p_1 = \frac{N(1-f)}{N_AV}RT.$

Dar $\frac{N}{N_A} = \nu$ şi atunci, putem scrie: $p_1 = \nu(1-f)\frac{RT}{V}$, unde p_1 este presiunea parțială a moleculelor nedisociate.

Pentru moleculele disociate în atomi putem scrie : $p_2V = \frac{N_2}{V}RT$ (2) unde N_2 reprezintă moleculele disociate în atomi.

Cum gazul este triatomic, vom scrie ca: $N_2 = 3fN$, încât relația (2) devine:

$$p_2V = \frac{3fNRT}{N_A} \rightarrow \quad p_2 = \frac{N}{N_A}\frac{3fRT}{V} = \upsilon\frac{3fRT}{V} = \frac{3\upsilon fRT}{V} \rightarrow$$

$$\rightarrow p_2 = \frac{3\upsilon fRT}{V} \rightarrow$$ presiunea parțială a atomilor proveniți din fracțiunea moleculelor disociate. Cunoscând presiunile parțiale p_1 şi p_2 , atunci presiunea totală va fi:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{\upsilon(1-f)RT}{V} + \frac{3\upsilon fRT}{V} = \frac{\upsilon RT}{V}(1 - f + 3f) = \frac{(1+2f)\upsilon RT}{V} =$$

$$= \frac{(1+2f)\upsilon R(T_0 + t^0C)}{V}$$

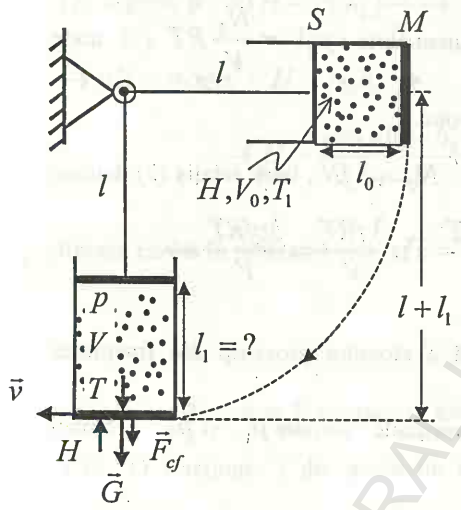
Presiunea totală a gazului este: $p = \frac{(1+2f)\upsilon R(T_0 + t^0C)}{V}$

18. Un cilindru izolat termic, de masă M, care practic este concentrată la capătul cilindrului, este închis cu un piston de secțiune S, legat cu o tijă de lungime l, articulată în punctul A de un suport fix. În cilindru se află un gaz ideal, cu exponent adiabatic γ, ocupând o porțiune de lungime l_0.

Ştiind că presiunea atmosferică este H şi acceleraţia gravitaţională g, lungimea porţiunii din cilindru l_1 ocupată de gaz, când cilindrul trece, de la sine, prin poziţie verticală, este:

(Teste, Medicină Iaşi, pag 135 / 1999)

Rezolvare:



Când sistemul mecanic este lăsat liber, gazul, va avea o destindere adiabatică, fapt pentru care scriem ecuaţia: Poisson: $HV_0^\gamma = pV^\gamma$, unde $V_0 = Sl_0$ şi $V = Sl_1$, încât relaţia devine:

$$HS^\gamma l_0^\gamma = pS^\gamma l_1^\gamma \rightarrow$$

$$\rightarrow l_1^\gamma = \frac{Hl_0^\gamma}{p} \rightarrow l_1 = l_0\sqrt[\gamma]{\frac{H}{p}}$$

Necunoscută în relaţia l_1 este p şi pentru a o determina scriem relaţia presiunilor, când sistemul trece prin poziţia de echilibru şi legea conservării energiei mecanice:

$$p + \frac{G}{S} + \frac{F_{cf}}{S} = H \rightarrow \quad p = H - \frac{Mg}{S} - \frac{Mv^2}{l + l_1} \quad (1).$$ şi

$$Mg(l + l_1) = \frac{Mv^2}{2} \rightarrow \quad v^2 = 2g(l + l_1).$$

Substituim $v^2 = 2g(l + l_1)$ în relaţia (1) şi obţinem :

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$p = H - \frac{Mg}{S} - \frac{M}{l+l_1} 2g(l+l_1) \rightarrow \quad p = H - \frac{Mg}{S} - \frac{2Mg}{S} =$$

$$= H - \frac{3Mg}{S} \rightarrow \; p = H - \frac{3Mg}{S}.$$

Cunoscând : $p = H - \frac{3Mg}{S} \rightarrow$ şi introducând în relaţia $l_1 = l_0 \sqrt[\gamma]{\frac{H}{p}}$,

obţinem: $l_1 = l_0 \sqrt[\gamma]{\frac{HS}{HS - 3Mg}}$.

18. Un gaz aflat la presiunea p şi temperatura t are densitatea ρ. Cunoscând numărul de molecule din unitatea de volum în condiţii iniţiale normale de presiune şi temperatură (p_0, T_0) notat cu n_0, masa unei molecule de gaz se calculează din :

(Teste, Medicină Iaşi, pag 132 / 1999)

Rezolvare:

Pentru a rezolva această problemă mai întâi aplicăm ecuaţia Clayeron-Mendeleev, odată la T_0 şi apoi pentru temperatura T, încât avem:

$p_0 V_0 = \nu R T_0$ şi $pV = \nu RT \rightarrow \quad \frac{p_0 V_0}{pV} = \frac{T_0}{T}$ (1). Dar $V_0 = \frac{m}{\rho_0}$ şi

$V = \frac{m}{\rho}$, încât substituind în (1) obţinem: $\frac{p_0 \frac{m}{\rho_0}}{p \frac{m}{\rho}} = \frac{T_0}{T} \rightarrow$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\frac{p_0\rho}{p\rho_0} = \frac{T_0}{T} \rightarrow$ (2). Cum $\rho_0 = \frac{\mu}{V_{\mu_0}} = \frac{m_0 N_A}{V_{\mu_0}} = m_0 n_0$,

unde $n_0 = \frac{N_A}{V_{\mu_0}}$. Relația $\rho_0 = m_0 n_0$ o introducem în (2) și avem :

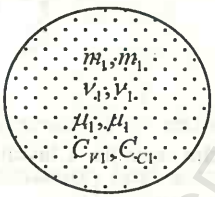
$\frac{p_0\rho}{pm_0 n_0} = \frac{T_0}{T} \rightarrow \quad m_0 = \frac{p_0\rho T}{pn_0 T_0}$. Masa unei molecule de gaz se

calculează cu relația: $m_0 = \frac{p_0\rho T}{pn_0 T_0}$.

20. Se consideră un amestec format din două gaze perfecte care au masele molare μ_1 și μ_2, căldurile izocore C_{V1} și C_{V2} și conțin ν_1, respectiv ν_2 kmoli de gaz. Căldura specifică, izocoră a amestecului este :

(teste, Medicină Iași, pag 133/ 1999)

Rezolvare:



Căldura dată celor două gaze la volum constant este:

$Q_v = Q_{1v} + Q_{2v}$, unde $Q_v = \upsilon C_v \Delta T$

$Q_{1v} = \upsilon_1 C_{v1} \Delta T$ și $Q_{2v} = \upsilon_2 C_{v2} \Delta T$

Înlocuind pe Q_v, Q_{1v} și Q_{2v} în relația lui Q_v,

obținem $\upsilon C_v \Delta T = \upsilon_1 C_{v1} \Delta T + \upsilon_1 C_{v2} \Delta T \rightarrow \upsilon C_v = \upsilon_1 C_{v1} + \upsilon_2 C_{v2} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{m}{\mu} C_v = \upsilon_1 C_{v1} + \upsilon_2 C_{v2}$ (1). Cum $c_v = \frac{C_V}{\mu}$, atunci (1) devine :

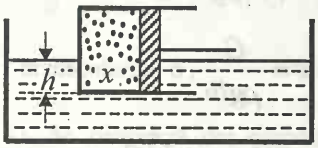
$mc_v = \upsilon_1 C_{v1} + \upsilon_2 C_{v2} \rightarrow \quad c_v = \frac{\upsilon_1 C_{v1} + \upsilon_2 C_{v2}}{m} = \frac{\upsilon_1 C_{v1} + \upsilon_2 C_{v2}}{m_1 + m_2} =$

$= \frac{\upsilon_1 C_{v1} + \upsilon_2 C_{v2}}{\mu_1 \upsilon_1 + \mu_2 \upsilon_2}$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Căldura specifică izocoră a amestecului este: $c_v = \dfrac{\upsilon_1 C_{v1} + \upsilon_2 C_{v2}}{\mu_1 \upsilon_1 + \mu_2 \upsilon_2}$.

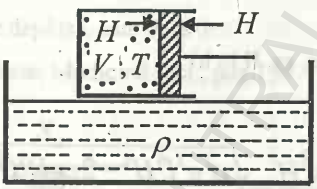
21. Se consideră un vas cubic de latură l plin cu aer la presiunea H, prevăzut cu un perete sub forma unui piston mobil. Dacă acesta este introdus într-un lichid de densitate ρ distanţa dintre pereţi verticali devine x.



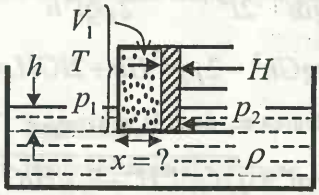
Ştiind că greutatea vasului plin cu aer este G, adâncimea de scufundare se poate calcula din relaţia:

(Teste , Medicină Iaşi, pag.121 / 1997)

Starea I



Starea II



Rezolvare: Prin introducerea vasului cubic în lichid, gazul are o transformare izotermă: $HV = p_1 V_1$ (1), unde $V = l^3$, $V_1 = l^2 x$ iar $p_1 = H + p_2$.

Presiunea p_2 provine din cea efectuată de lichid şi se calculează astfel:

$p_2 = \dfrac{0 + \rho g h}{2} \dfrac{h}{l}$, unde $\dfrac{0 + \rho g h}{2}$ este presiunea medie hidrostatică, iar $\dfrac{h}{l}$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

reprezintă fracțiunea din h. Așa că $p_1 = H + \frac{0+\rho g h}{2}\frac{h}{l} = H + \frac{\rho g h^2}{2l}$,

Toate mărimile fizice : V_1, V_2, p_1 le substituim în (1) şi avem :

$$Hl^3 = \left(H + \frac{\rho g h^2}{2l}\right) l^2 x \rightarrow \qquad Hl = H + \frac{\rho g h^2}{2l} x \quad (2)$$

Aflarea distanței x.

La echilibru: $F_A = G \rightarrow G_l = G \rightarrow m_l g = G \rightarrow V_l \rho g = G \rightarrow$

$\rightarrow xlh\rho g = G \rightarrow \qquad x = \frac{G}{\rho g l h}$. Valoarea $x = \frac{G}{\rho g l h}$, o introducem în

(2) şi obținem : $Hl = H + \left(\frac{\rho g h^2}{2l}\right)\left(\frac{G}{\rho g l h}\right) = \frac{GH}{\rho g l h} + \frac{\rho g h^2 G}{2\rho g l^2 h} =$

$$= \frac{GH}{\rho g l h} + \frac{hG}{2l^2} = \frac{2GHl + \rho g h^2 G}{2\rho g l^2 h} \rightarrow 2\rho g H l^3 h = 2lGH + \rho g G h^2 \rightarrow$$

$\rightarrow \rho g G h^2 - 2\rho g l^3 H h + 2lGH = 0$ (ec. gr. II în h)

Rezolvarea ec. de gr.II în h:

$$h = \frac{\rho g l^3 \pm \sqrt{\rho^2 g^2 l^6 H^2 - 2\rho g H l G^2}}{\rho g G} = \frac{\rho g l^3 H}{\rho g G} \pm \frac{\sqrt{\rho^2 g^2 l^6 H^2 - 2\rho g H l G^2}}{\rho g G} =$$

$$= \frac{l^3 H}{G} \pm \sqrt{\frac{\rho^2 g^2 l^6 H^2}{\rho^2 g^2 G^2} - \frac{2\rho g H l G^2}{\rho^2 g^2 G^2}} = \frac{l^3 H}{G} \pm \sqrt{\frac{l^6 H^2}{G^2} - \frac{2Hl}{\rho g}} =$$

$$= \frac{l^3 H}{G} \pm \sqrt{\frac{l^6}{G^2}\left(H^2 - \frac{2HlG^2}{l^6 \rho g}\right)} = \frac{l^3 H}{G} \pm \frac{l^3}{G}\sqrt{H^2 - \frac{2HG^2}{l^5 \rho g}} =$$

$$= \frac{l^3}{G}\left(H \pm \sqrt{H^2 - \frac{2HG^2}{l^5 \rho g}}\right).$$

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Adâncimea de scufundare h, se calculează cu relația:

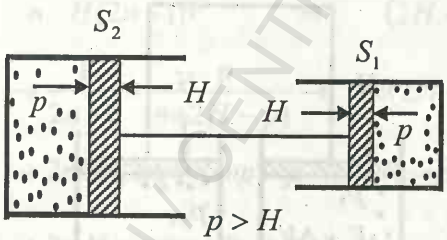
$$h = \frac{l^3}{G}\left(H \pm \sqrt{H^2 - \frac{2HG^2}{l^5 \rho g}}\right)$$

Se ia semnul + sau – din fața radicalului, numai dacă $h > 0$.

Obs. În „Teste , Medicină Iași'' /1999 este aceiași problemă, însă necunoscuta este x iar h se cunoaște. În acest caz din condiția $F_A = G$, se află $x = \frac{G}{\rho g l h}$

21. Se consideră doi cilindri orizontali, prevăzuți cu pistoane de secțiune S_1 și S_2 legați printr-o tijă rigidă. Pistoanele se pot mișca fără frecare. Știind că presiunea aerului din cei doi cilindri este aceeași p și mai mare decât presiunea atmosferică H, forță care trebuie să acționeze asupra tijei, pentru a nu se deplasa, este dată de:

(Teste, Medicină Iași , pag.130 /1999)



Rezolvare:

Pentru pistonul de secțiune

$S_2 : p - H = \frac{F_2}{S_2} \rightarrow$

$\rightarrow F_2 = (p - H)S_2$ și

pentru pistonul de secțiune S_1: $p - H = \frac{F_1}{S_1} \rightarrow F_1 = (p - H)S_1$.

Cum $S_2 > S_1$, rezultă $F_2 > F_1$, încât forța cerută în problemă este :

$F_2 - F_1 = F \rightarrow$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$(p-H)S_2-(p-H)S_1=F$ sau $F=(p-H)(S_2-S_1)$

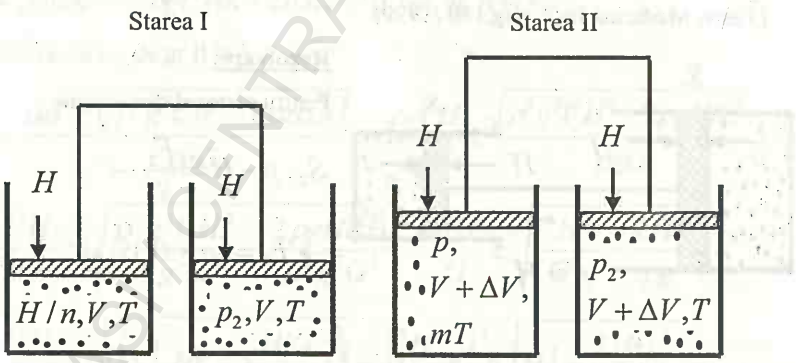
Forţa care trebuie să acţioneze asupra tijei, pentru a nu se deplasa este:

$$F=(p-H)(S_2-S_1).$$

22. Pistoanele a doi cilindri identici sunt legate rigid printr-o tijă nedeformabilă în formă de U. Masa pistoanelor şi a tijei se neglijează. În cilindri se află volume egale de aer la temperatura T iar presiunea din cilindrul A este de n ori mai mică decât presiunea atmosferică H. Încălzind aerul din cilindrul A până la o temperatură de n ori mai mare decât cea iniţială şi menţinând în cilindrul B temperatura constantă, presiunea din cilindrul A va fi dată de relaţia:

(Teste, Medicină Iaşi, pag.133 /1999)

Rezolvare:



În starea I de echilibru al presiunilor scriem: $2H=\frac{H}{n}+p_2\rightarrow$

$$\rightarrow 2nH=H+np_2\rightarrow \quad H(2n-1)=+np_2\rightarrow \quad p_2=\frac{H(2n-1)}{n}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Presiunea p_2 reprezintă presiunea aerului din cilindrul B, la echilibru în starea I.

La ridicarea temperaturii aerului, din cilindrul A până la temperatura mT, aerul din ambii cilindri se destinde, permiţând scrierea transformării generale:

$$\frac{\frac{H}{n}V}{T}=\frac{p(V+\Delta V)}{mT} \text{ şi } \frac{p_2V}{T}=\frac{p_2'(V+\Delta V)}{T}$$

unde $2H=p+p_2'\rightarrow p_2'=2H-p$ iar p fiind presiunea din cilindru A, starea B, ce trebuie aflată conform cerinţei problemei.

Prin operaţiile matematice făcute, sistemul de mai sus devine:

$$\begin{cases}\frac{HV}{n}=\frac{p(V+\Delta V)}{m}\\ \frac{H(2n-1)V}{n}=(2H-p)(V+\Delta V)\end{cases}$$

Prin împărţirea ecuaţiilor din sistem, obţinem:

$$\frac{HV}{n}\frac{n}{H(2n-1)V}=\frac{p(V+\Delta V)}{m}\frac{1}{(2H-p)(V+\Delta V)}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{1}{2n-1}=\frac{p}{m(2H-p)}\rightarrow \quad m(2H-p)=p(2n-1)\rightarrow$$

$$\rightarrow 2mH-mp=2np-p\rightarrow \quad 2mH=mp+2np-p\rightarrow$$

$$\rightarrow 2mH=p(m+2n-1)\rightarrow \quad p=\frac{2mH}{m+2n-1}\rightarrow \quad p=\frac{2H}{1+\frac{2n-1}{m}}\rightarrow$$

Presiunea din cilindrul A în condiţiile date în problemă este:

$$p=\frac{2H}{1+\frac{2n-1}{m}}\rightarrow$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

24. O masă m de gaz ideal monoatomic cu masa molară μ se află la presiunea p şi temperatura t. Să se calculeze căldura absorbită de gaz prin încălzire izobară dacă în final gazul ocupă un volum V.

(Teste , Medicină Iaşi , pag 134/ 1999)

Rezolvare:

Întrucât gazul are o transformare izobară (p=const.), căldura Q primită va fi : $Q = \nu C_p \Delta T = \nu C_p (T_f - T)$ unde T_f o calculăm din ecuaţia Clapeyron-Mendeleev: $pV = \nu R T_f \rightarrow \quad T_f = \dfrac{pV}{\nu R}$

Cunoscând pe T_f şi $C_p = \dfrac{5}{2}R$, atunci $Q = \nu C_p (T_f - T)$ va fi:

$$Q = \nu \frac{5}{2} R\left(\frac{pV}{\nu R} - T\right) = \frac{5}{2}\nu R \frac{pV - \nu RT}{\nu R} = \frac{5}{2}\left(pV - \nu RT\right) =$$

$$= 2{,}5\left(pV - \nu RT\right) = 2{,}5\left[pV - \nu R(T_0 + t)\right]$$

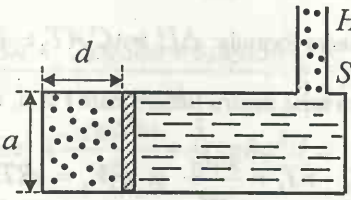
Căldura absorbită de gaz în transformarea izobară este:

$$Q = 2{,}5\left[pV - \nu R(T_0 + t)\right]$$

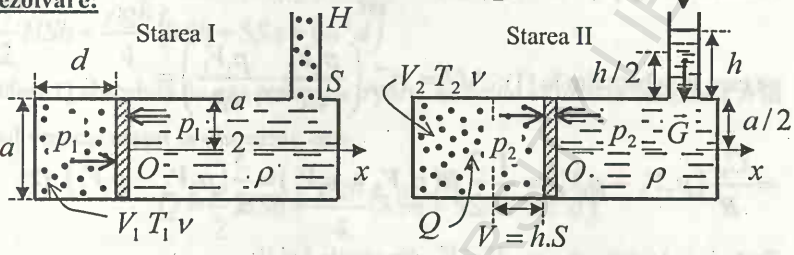
25. Se consideră un vas de forma celui din figură, prevăzut cu un pistol termoionizat de formă pătrată, cu latura a. În stânga pistonului se află un gaz ideal cu $C_V = \dfrac{3}{2}R$, iar în dreapta un lichid cu densitatea ρ. La compartimentul din dreapta se află sudat un tub subţire vertical, deschis la capătul superior . Dacă lungimea porţiunii ocupate de gaz este d şi presiunea atmosferică H, căldură absorbită de gaz pentru ca lichidul să urce în tub pe înălţimea h este:

(Teste, Medicină Iaşi , pag.134 /1999)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Rezolvare:



Căldura Q primită de gaz, face ca să se obțină o variație a energiei a energiei interne ΔU și efectuarea unui lucru mecanic, de ridicare a lichidului la înălțimea h în tubul vertical prevăzut la dispozitiv: $Q = \Delta U + L$.

Pentru a afla pe Q, mai întâi trebuie calculați ΔU și L.

Calcularea L.

Lucrul mecanic L la ridicarea lichidului la înălțimea $\left(\frac{a}{2}+\frac{h}{2}\right)$ față de sistemul de referință ales, va fi: $L = G\left(\frac{a}{2}+\frac{h}{2}\right) = mg\left(\frac{a}{2}+\frac{h}{2}\right) =$

$$= V\rho g\left(\frac{a}{2}+\frac{h}{2}\right) = Sh\rho g\left(\frac{a}{2}+\frac{h}{2}\right) = \rho gS\frac{ah}{2} + \rho gS\frac{ah^2}{2}.$$

Lucrul mecanic pentru ridicarea greutății G de lichid la înălțimea h în tubul vertical atașat este: $L = \rho gS\frac{ah}{2} + \rho gS\frac{ah^2}{2}$

Calcularea ΔU.

Variația energiei interne pentru orice proces: izocor, izobar și adiabatic se calculează cu formula $\Delta U = \nu C_v \Delta T$.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARA

Pentru calcularea ΔU folosim formula: $\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1)$ (1)

Pentru aflarea T_1 la T_2 vom scrie pentru fiecare stare I şi II, ecuaţia Clayeron-Mendeleev : $p_1V_1 = \nu RT_1 \to T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R}$ şi $p_2V_2 = \nu RT_2 \to T_2 = \frac{p_2V_2}{\nu R}$

pe care le substituim în (1): $\Delta U = \nu C_V \left(\frac{p_2V_2}{\nu R} - \frac{p_1V_1}{\nu R} \right) =$

$$= \frac{C_V}{R}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{1}{R}\frac{3}{2}R(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) \quad (2)$$

Trebuie calculaţi: p_1, p_2, V_1 şi V_2 din stările I şi II:

$p_1 = H + \rho g\frac{a}{2}$, $V_1 = a^2 d$, $p_2 = H + \rho g\frac{a}{2} + \rho gh$ şi

$V_2 = V_1 + Sh = a^2 d + Sh$

Cunoscând p_1, p_2, V_1, V_2, se înlocuiesc în (2) şi obţinem:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left[\left(H + \rho g\frac{a}{2} + \rho gh \right)\left(a^2 d + Sh\right) - \left(H + \rho g\frac{a}{2} \right)\left(a^2 d\right) \right] =$$

$$= \frac{3}{2}\left[Ha^2 d + \frac{\rho g a^3 d}{2} + \rho gha^2 + HSh + \frac{\rho gaSh}{2} + \rho gh^2 S - Ha^2 d - \frac{\rho g a^3 d}{2} \right] =$$

$$= \frac{3}{2}\rho ghda^2 + \frac{3}{2}HSh + \frac{3}{4}\rho gaSh + \frac{3}{2}\rho gh^2 S \to$$

$$\to \Delta U = \frac{3}{2}\rho ghda^2 + \frac{3}{2}HSh + \frac{3}{4}\rho gaSh + \frac{3}{2}\rho gh^2 S.$$

Şi acum, putem calcula căldura $Q = \Delta U + L$, încât scriem:

$$Q = \Delta U + L = \frac{\rho gSh^2}{2} + \frac{\rho gSha}{2} + \frac{3}{2}\rho ghda^2 + \frac{3}{2}HSh + \frac{3}{4}\rho gaSh + \frac{3}{2}\rho gh^2 S =$$

BCU ALECU RUSSO BALTI STATE UNIVERSITY LIBRARY

$$=\frac{3}{2}HSh+\frac{4\rho gSh^2}{2}+\frac{2\rho gSha+3\rho gaSh}{4}+\frac{3}{2}\rho gha^2d=$$

$$=\frac{3}{2}HSh+2\rho gSh^2+\frac{5\rho gSha}{4}+\frac{3}{2}\rho gha^2d=$$

$$=\frac{3}{2}HSh+\frac{\rho gh}{4}\left(8Sh+5Sa+6a^2d\right)$$

Căldura Q absorbită de gaz pentru ca o parte de lichid să urce la înălţimea h în tubul vertical ataşat la dispozitiv este :

$$Q=\frac{3}{2}HSh+\frac{\rho gh}{4}\left(8Sh+5Sa+6a^2d\right).$$

26. Pentru alimentarea cu oxigen a unui bolnav, un medic are la dispoziţie o butelie de volum V care conţine oxigen la presiunea p şi temperatura T. Un dispozitiv special permite ca alimentarea cu oxigen să se facă numai la presiunea p_0 şi temperatura T_0. Supapa dispozitivului se închide când presiunea oxigenului din butelie devine p_0 şi temperatura T_0. Dacă debitul volumic al oxigenului este q, timpul de alimentare este:

(Teste, Medicină Iaşi, pag 131 /1999)

Rezolvare:

Notăm cu V, p şi T parametri oxigenului în starea iniţială din butelie, iar în starea finală cu V_0, p_0 şi T_0.

Volumul de oxigen folosit de bolnav în timpul Δt va fi : $\Delta V = V - V_0$ iar debitul volumic se va scrie: $q=\frac{\Delta V}{\Delta t}$ de unde $\Delta t=\frac{\Delta V}{q}=\frac{V-V_0}{q}$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru calcularea lui V_0, scriem legea generală: $\frac{pV}{T}=\frac{p_0V_0}{T_0}\rightarrow V_0=\frac{pVT_0}{p_0T}$

încât : $\Delta t=\frac{\Delta V}{q}=\frac{V-V_0}{q}=\frac{V-\frac{pVT_0}{p_0T}}{q}=\frac{V\left(1-\frac{pT_0}{p_0T}\right)}{q}=\frac{V\left(p_0T-pT_0\right)}{qp_0T_0}$

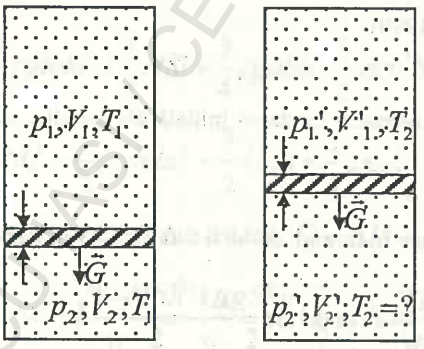
Timpul de alimentare cu oxigen a bolnavilor este : $\Delta t=\frac{V\left(p_0T-pT_0\right)}{qp_0T_0}$

27. Un cilindru închis la capete, aflat în poziţie verticală, este împărţit în două compartimente cu ajutorul unui piston mobil care se poate mişca fără frecare. În cele două compartimente se află mase egale din acelaşi gaz, la temperatura T_1. Pistonul se află în echilibru mecanic, iar volumul compartimentului superior este de n ori mai mare decât al celui inferior. Temperatura T_2 la care a fost încălzit sistemul pentru ca volumul compartimentului superior să fie de k ori mai mare decât al celui inferior este:

(Teste, Medicină Iaşi, pag131 /ed 1999)

Rezolvare:

Starea I *Starea II*



$V_1=nV_2$ $V_1'=nV_2'$

Din figură se vede:

$V_1+V_2=V_1'+V_2'$

$nV_2+V_2=KV_2'+V_2'\rightarrow$

$\rightarrow V_2(n+1)=V_2'(K+1)\rightarrow$

$\rightarrow \frac{V_2'}{V_2}=\frac{n+1}{K+1}$ (1)

La echilibru mecanic: $p_1+\frac{G}{S}=p_2\rightarrow\frac{G}{S}=p_2-p_1$

$p_1'+\frac{G}{S}=p_2'\rightarrow\frac{G}{S}=p_2'-p_1'$ $\Longrightarrow$

$\rightarrow p_2-p_1=p_2'-p_1'\rightarrow p_2\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right)=p_2'\left(1-\frac{p_1'}{p_2'}\right)\rightarrow$

$\rightarrow\frac{p_2'}{p_2}=\frac{1-\frac{p_1}{p_2}}{1-\frac{p_1'}{p_2'}}$ (2)

În starea I: $p_1V_1=\nu RT_1\rightarrow$ compartimentul A

$p_2V_2=\nu RT_1\rightarrow$ compartimentul B, încât $p_1V_1=p_2V_2\rightarrow$

$\rightarrow\frac{p_1}{p_2}=\frac{V_2}{V_1}\rightarrow\frac{p_1}{p_2}=\frac{V_2}{nV_2}\rightarrow\quad\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{n}$

În starea II: $p_1'V_1'=\nu RT_2\rightarrow$ compartimentul A

$p_2'V_2'=\nu RT_2\rightarrow$ compartimentul B încât $p_1'V_1'=p_2'V_2'\rightarrow$

$\frac{p_1'}{p_2'}=\frac{V_2'}{V_1'}\rightarrow\frac{p_1'}{p_2'}=\frac{V_2'}{KV_2'}\rightarrow\frac{p_1'}{p_2'}=\frac{1}{K}$. Relaţiile $\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{n}$ şi $\frac{p_1'}{p_2'}=\frac{1}{K}$

le substituim în (2) şi obţinem : $\frac{p_2'}{p_2}=\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{K}}=\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{K-1}{K}}=\frac{n-1}{n}\frac{K}{K-1}\rightarrow$

$\rightarrow\frac{p_2'}{p_2}=\frac{n-1}{n}\frac{K}{K-1}$ (3)

Pentru a afla pe T_2, aplicăm legea generală a gazelor din compartimentul B a

stării I, în compartimentul B a stării II: $\frac{p_2V_2}{T_1}=\frac{p_2'V_2'}{T_2}\rightarrow T_2=T_1\frac{V_2'}{V_2}\frac{p_2'}{p_2}$ (4)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum $\frac{V_2'}{V_1}=\frac{n+1}{K+1}$ din relaţia (1) iar $\rightarrow \frac{p_2'}{p_2}=\frac{n-1}{n}\frac{K}{K-1}$ din relaţia (3) şi

înlocuind aceste rapoarte în relaţia (4) avem: $T_2=T_1\frac{n+1}{K+1}\frac{n-1}{n}\frac{K}{K-1}=$

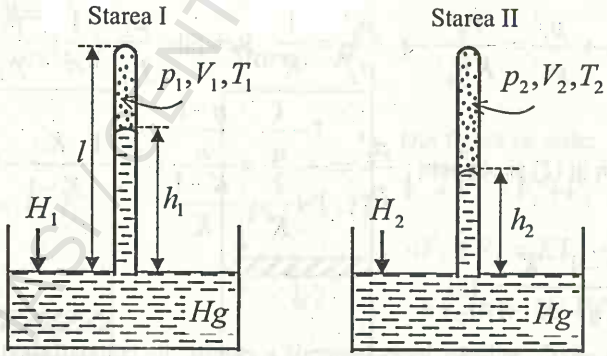
$=T_1\frac{n^2-1}{K^2-1}\frac{K}{n}$. Temperatura T_2 cerută în problemă este :

$$T_2=T_1\frac{n^2-1}{K^2-1}\frac{K}{n}.$$

28. Camera unui tub barometric conţine o cantitate mică de aer. Într-o zi când temperatura este $t_1=17^0C$ şi presiunea atmosferică $H_1=760$ torr, înălţimea coloanei de mercur este 71 cm, iar în altă zi când temperatura este 27^0C, lungimea coloanei de mercur este 70cm. Dacă lungimea tubului barometric este 100cm, presiunea atmosferică în cea de-a doua zi are valoarea:

(Teste, Medicină Iaşi , pag 132 / 1999)

Rezolvare:



Aplicăm legea generală a gazelor în camera tubului barometrului din starea I în starea II:

$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}$ (1) unde $V_1=S(l-h_1)$, $V_2=S(l-h_2)$,

$p_1+h_1=H_1\rightarrow p_1=H_1-h_1$ şi $p_2+h_2=H_2\rightarrow p_2=H_2-h_2$

Întrucât în tub barometric avem Hg, presiunile p_1 şi p_2 cât şi H_1 şi H_2 le calculăm în mm col. Hg sau în cm col. Hg, ştiut că, 1mm col. = 1 torr, iar 760 mm col. = 760 torr. Şi lungimile h_1 şi h_2 le luăm în mm sau în cm.

Pentru ca presiunea H_2 s-o calculăm în torr, atunci toate celelalte mărimi fizice, le vom lua pentru presiune în mm col. Hg iar pentru lungime în mm. Înlocuind V_1 şi V_2, p_1 şi p_2 în relaţia (1), obţinem:

$$\frac{(H_1-h_1)S(l-h_1)}{T_1}=\frac{(H_2-h_2)S(l-h_2)}{T_2}\rightarrow$$

$$\rightarrow H_2-h_2=\frac{T_2(H_1-h_1)(l-h_1)}{T_1(l-h_2)}\rightarrow\ H_2=h_2+\frac{T_2(H_1-h_1)(l-h_1)}{T_1(l-h_2)}$$

Numeric: $H_2=700+\frac{300(760-710)(1000-710)}{290(1000-700)}=700+50=$

$=750$ torr

Presiunea atmosferică în a doua zi este: $H_2=750$ torr

29. Se consideră o incintă de volum V în care se menţine presiunea constantă p_0. Dacă prin creşterea temperaturii de la T_1 şi T_2 numărul de moli de gaz din incintă variază de la ν_1 la ν_2, variaţia energiei interne a gazului din incintă este: (Teste, Medicină, pag 133 /1999)

Rezolvare:

În starea I: $U_1=\frac{3}{2}\nu_1RT_1$ şi în starea II: $U_2=\frac{3}{2}\nu_2RT_2$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Variația energiei interne $\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}R(\nu_2 T_2 - \nu_1 T_1)$

Cum : $p_0 V = \nu_1 R T_1 \rightarrow \nu_1 T_1 = \frac{p_0 V}{R}$ și $p_0 V = \nu_2 R T_2 \rightarrow \nu_2 T_2 = \frac{p_0 V}{R}$,

atunci: $\Delta U = \frac{3}{2}R\left(\frac{p_0 V}{R} - \frac{p_0 V}{R}\right) = 0 \rightarrow \Delta U = 0$

Variația energiei interne din incintă este : $\Delta U = 0$

30. Se consideră un recipient cu volumul V, plin cu aer la presiunea atmosferică H, la care este atașat un corp de pompă prevăzut cu un piston. Cunoscând că volumul corpului de pompă este ν și presupunând transformarea izotermă, numărul de curse pe care le efectuează pistonul pentru a reduce presiunea din recipient la valoarea p este dată de:

(Teste, Medicină Iași , pag.128 / 1999)

Rezolvare:

La scoaterea aerului dintr-un recipient de volum V , cu ajutorul unei pompe de vidat a cărei corp de pompă are volumul ν , de la presiunea H la presiunea p , avem formula generală:

$p_n = p_0\left(\frac{V}{V+\nu}\right)^n$, unde $p_n = p \rightarrow$ este presiunea finală din recipient.

$p_0 = H \rightarrow$ presiunea inițială notată din recipient și $n \rightarrow$ numărul de curse efectuate de piston pe care trebuie să-l aflăm.

Relația devine: $p = H\left(\frac{V}{V+\nu}\right)^n \rightarrow \quad \frac{p}{H} = \left(\frac{V}{V+\nu}\right)^n \rightarrow$

$$\ln\frac{p}{H} = n\ln\frac{V}{V+\nu} \rightarrow n = \frac{\ln\frac{p}{H}}{\ln\frac{V}{V+\nu}} = \ln\left[\frac{p}{H} - \frac{V}{V+\nu}\right].$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

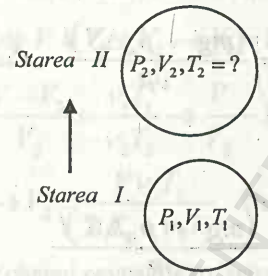
Numărul de curse n este : $n = \ln\left[\frac{p}{H} - \frac{V}{V+v}\right]$

31. Un balon meteorologic este umplut cu un gaz uşor la presiunea p_1 şi temperatura t_1. Când balonul a ajuns la o numită altitudine unde presiunea aerului este p_0, volumul balonului a crescut cu un procent K% iar presiunea grupului din balon diferă de cea a aerului cu Δp.

Cunoscând că temperatura aerului este egală cu cea a gazului din balon (T_2), aceasta este dată de relaţia:

(Teste, Medicină Iaşi, pag.133 /1999)

Rezolvare:



Scriem ecuaţia generală a gazelor din starea I şi II:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \rightarrow T_2 = T_1\frac{p_2V_2}{p_1V_1} \quad (1)$$

Dar $p_2 = p_0 + \Delta p$ şi $V_2 = V_1 + KV_1 =$

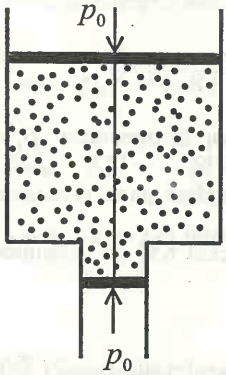
$= V_1(K+1)$ încât relaţia (1) devine:

$$T_2 = T_1\frac{(p_0+\Delta p)V_1(K+1)}{p_1V_1} = T_1\frac{(p_0+\Delta p)(K+1)}{p_1}.$$

Dar $T_1 = T_0 + t_1$ şi atunci: $T_2 = \frac{(T_0+t_1)(p_0+\Delta p)(K+1)}{p_1} \rightarrow$ temperatura gazului din balon la altitudinea respectivă.

32. Un tub cilindric vertical de secţiuni diferite este închis la ambele capete prin două pistoane de arii diferite ca în figura alăturată:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Fiecare piston alunecă în porțiunea de tub corespunzătoare. Între cele două pistoane legate printr-un fir inextensibil se găsește un mol de gaz ideal. Diferența dintre secțiunile celor două pistoane este ΔS, suma maselor celor două pistoane este m, iar presiunea atmosferică este p_0. Deplasarea l a pistoanelor se obține atunci când sistemul este încălzit cu ΔT, dat de relația:

(Teste grilă fizică, Rodica Perponi și Luiza Grindei pag.21)

Rezolvare:

Fiind o variație a temperaturii ΔT, are loc o variație de presiune efectuându-se un lucru mecanic: $L = \nu R\Delta T$. Cum $L = Fl$, atunci $Fl = \nu R\Delta T$, unde $\Delta T = \frac{Fl}{\nu R}$. Dar $F = mg + p_0\Delta S$, încât $\Delta T = \frac{(mg + p_0\Delta S)l}{\nu R}$. Cum $\nu = 1mol$ atunci: $\Delta T = \frac{(mg + p_0\Delta S)l}{R}$.

Sistemul termodinamic trebuie încălzit cu : $\Delta T = \frac{(mg + p_0\Delta S)l}{R}$

33. Un cilindru orizontal, de volum $V = 6l$, împărțit în două compartimente de către un piston termoizolant, care se poate mișca fără frecare. În compartimentul din partea stângă a pistonului se află $\nu_1 = 4moli$ de azot, la temperatura $T_1 = 300K$, iar în cel din partea dreaptă $\nu_2 = 6moli$ de oxigen, la temperatura $T_2 = 400K$. Să se calculeze:

a) volumul ocupat de oxigen;

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

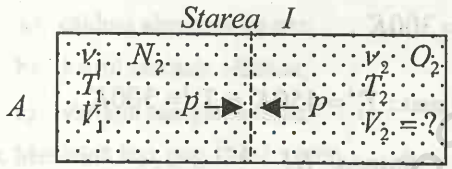
b) temperaturile celor două gaze la care pistonul se află jumătatea cilindrului, dacă presiunea rămâne neschimbată;

c) volumul ocupat de azot, dacă cele două gaze se află la aceeaşi temperatură.

(Teste , Medicină Iaşi, pag 131 / 1999)

Rezolvare:

a)



În compartimentul A: $pV_1 = \nu_1 RT_1$ şi în compartimentul B: $pV_2 = \nu_2 RT_2$

Facem raportul relaţiilor şi avem: $\frac{pV_1}{pV_2} = \frac{\nu_1 RT_1}{\nu_2 RT_2} \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1 T_1}{\nu_2 T_2}$ (1)

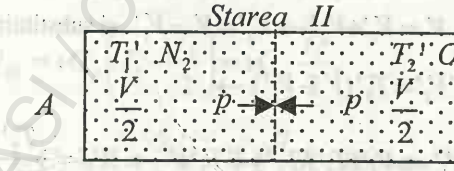
Dar $V = V_1 + V_2 \rightarrow V_1 = V - V_2$ şi atunci substituind în (1) avem:

$$\frac{V - V_2}{V_2} = \frac{\nu_1 T_1}{\nu_2 T_2} \rightarrow \frac{V}{V_2} - 1 = \frac{\nu_1 T_1}{\nu_2 T_2} \rightarrow \frac{V}{V_2} = \frac{\nu_1 T_1}{\nu_2 T_2} + 1 = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_2 T_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_2 = \frac{V \nu_2 T_2}{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}. \text{ Numeric: } V_2 = \frac{6 \bullet 6 \bullet 400}{4 \bullet 300 + 6 \bullet 400} = 4l \rightarrow$$

Volumul ocupat de oxigen este : $V_2 = 4l$

b)



Din starea I în starea II: $\frac{pV_1}{T_1} = \frac{p\frac{V}{2}}{T_1'} \rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V}{2T_1'} \rightarrow T_1' = \frac{T_1 V}{2V_1}$

BCU IAŞI "CAROL I" UNIVERSITY LIBRARY

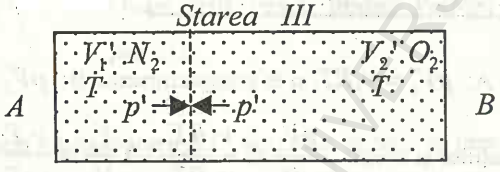
Numeric: $T_1' = \frac{6 \bullet 300}{2 \bullet 2} = 450K$.

$$\frac{pV_2}{T_2} = \frac{\frac{V}{2}p}{T_2'} \rightarrow \frac{V_2}{T_2} = \frac{V}{2T_2'} \rightarrow T_2' = \frac{VT_2}{2V_2}$$

Numeric: $T_2' = \frac{6 \bullet 400}{2 \bullet 4} = 300K$.

Răspunsurile la punctul b) sunt : $T_1' = 450K$ și $T_2' = 300K$.

c)



Din starea II în starea III: $\frac{p\frac{V}{2}}{T_1'} = \frac{p'V_1'}{T} \rightarrow \frac{pV}{2T_1'} = \frac{p'V_1'}{T} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{p'}{T} = \frac{pV}{2T_1'V_1'}\ ;\ \frac{p\frac{V}{2}}{T_2'} = \frac{p'V_2'}{T} \rightarrow \frac{pV}{2T_2'} = \frac{p'V_2'}{T} \rightarrow \rightarrow \frac{p'}{T} = \frac{pV}{2T_2'V_2'}$$

Din $\rightarrow \frac{p'}{T} = \frac{2V}{2T_1'V_1'}$ și $\frac{p'}{T} = \frac{VT}{2T_2'V_2'} \rightarrow \frac{VT}{2T_1'V_1'} = \frac{VT}{2T_2'V_2'} \rightarrow$

$\rightarrow T_1'V_1' = T_2'V_2'$. Dar $V = V_1' + V_2' \rightarrow V_2' = V - V_1'$ și substituim în

$\rightarrow T_1'V_1' = T_2'V_2' \rightarrow T_1'V_1' = T_2'(V - V_1') \rightarrow$

$\rightarrow T_1'V_1' = T_2'V - T_2'V_1' \rightarrow V_1'(T_1' + T_2') = T_2'V \rightarrow V_1' = \frac{T_2'V}{T_1' + T_2'}$

Numeric: $V_1' = \frac{300 \bullet 6}{450 + 300} = \frac{18000}{750} = 2,4l$.

Volumul ocupat de azot este : $V_1' = 2,4l$.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

34. Un Kmol de gaz ideal cu $C_V = \frac{5}{2}R$, aflat la temperatura $T_1 = 300K$ este supus unei răciri izocore astfel încât presiunea sa scade la jumătate. În continuare, gazul este supus unei transformări izobare până ajunge la temperatura inițială.

Se cere: a) căldura absorbită de gaz;

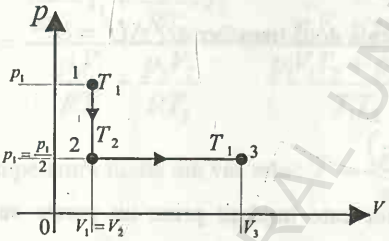
b) lucrul mecanic efectuat;

c) variația energiei interne.

(Teste, Medicină Iași, pag.134 / 1999)

Rezolvare:

Reprezentăm transferurile în constanta p-V



a) $Q_{23} = \nu C_p (T_1 - T_2)$ (1)

Aflăm T_2 în transformarea izocoră:

$1\text{-}2: \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{T_1 p_2}{p_1}$.

Cum $p_2 = \frac{p_1}{2} \rightarrow p_1 = 2p_2$,

obținem: $T_2 = \frac{T_1 p_2}{2p_2} = \frac{T_1}{2} \rightarrow T_2 = \frac{T_1}{2}$. Pe $T_2 = \frac{T_1}{2}$ îl substituim în (1) și avem: $Q_{23} = \nu C_p \left(T_1 - \frac{T_1}{2} \right) = \nu C_p \frac{T_1}{2}$.

Cum $C_p = C_v + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R$, obținem: $Q_{23} = \frac{7\nu R T_1}{4}$.

Căldura absolută în transformarea de la 2 la 3 va fi $Q_{23} = 4362{,}75kg$,

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) Lucrul mecanic efectuat, se calculează cu formula:

$L_{23} = \nu R\Delta T = \nu R(T_1 - T_2)$ dar $T_2 = \frac{T_1}{2}$ şi atunci $L_{23} = \nu R\left(T_1 - \frac{T_1}{2}\right) =$

$= \frac{\nu RT_1}{2} \rightarrow \qquad L_{23} = \frac{\nu RT_1}{2}$ Numeric :

$$L_{23} = \frac{1 \bullet 8310 \bullet 300}{2} = 8310 \bullet 150J = 831 \bullet 15 \bullet 10^2 J = 1246{,}5KJ .$$

Lucrul mecanic efectuat este : $L_{23} = 1246{,}5KJ$.

c) Calcularea variaţiei energiei interne:

$$\Delta U = U_3 - U_1 = \frac{i}{2}\nu RT_1 - \frac{i}{2}\nu RT_1 = 0 \rightarrow \quad \Delta U = 0 .$$

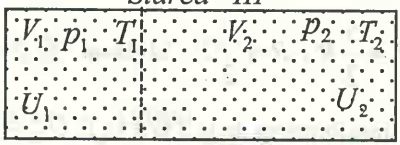
Variaţia energiei interne a gazului în cele două transformări $\Delta U = 0$.

35. Un vas izolat termic de exterior este împărţit printr-un perete subţire termo-conductor în două compartimente cu volumele V_1 şi V_2, conţin acelaşi gaz la presiunile p_1 şi p_2, având temperaturile T_1 şi T_2. După încetarea schimbului de căldură prin perete, temperatura finală din vas este dată de:

(Teste, Medicină Iaşi, pag.123/ 1997)

Rezolvare:

Starea III



$U = U_1 + U_2$ (proprietatea de aditivitate a energiei interne).

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Unde : $U=\frac{3}{2}\nu RT$, $U_1=\frac{3}{2}\nu_1 RT_1$ şi $U_2=\frac{3}{2}\nu_2 RT_2$ pe care le substituim în $U=U_1+U_2$ şi obţinem : $\frac{3}{2}\nu RT=\frac{3}{2}\nu_1 RT_1+\frac{3}{2}\nu_2 RT_2 \rightarrow$

$\rightarrow \nu T=\nu_1 T_1+\nu_2 T_2$, dar $\nu=\nu_1+\nu_2$ încât: $(\nu_1+\nu_2)T=\nu_1 T_1+\nu_2 T_2 \rightarrow$

$T=\frac{\nu_1 T_1+\nu_2 T_2}{\nu_1+\nu_2}$ (1) $\quad p_1V_1=\nu_1 RT_1 \rightarrow \nu_1=\frac{p_1V_1}{RT_1}$,

$p_2V_2=\nu_2 RT_2 \rightarrow \nu_2=\frac{p_2V_2}{RT_2}$. Valorile ν_1 şi ν_2 le înlocuim în (1) şi obţinem:

$$T=\frac{\frac{p_1V_1}{RT_1}T_1+\frac{p_2V_2}{RT_2}T_2}{\frac{p_1V_1}{RT_1}+\frac{p_2V_2}{RT_2}}=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{\frac{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}{T_1T_2}}=\frac{(p_1V_1+p_2V_2)T_1T_2}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}.$$

Temperatura finală din vas este : $T=\frac{(p_1V_1+p_2V_2)T_1T_2}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}$.

36. Se dă un cilindru cu piston de secţiune S_1 care se continuă cu un tub cilindric de secţiune S_2 şi de lungime l_2 (ca în figura alăturată), cufundat complet în mercur. Pistonul se află iniţial la distanţa l_1 de capătul cilindrului . Să se afle:

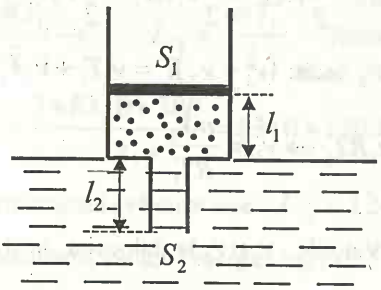
a) distanţa a_1 pe care va coborî mercurul în tub, dacă pistonul este introdus până la refuz în cilindru;

b) distanţa a_2 pe care va urca mercurul în cilindru atunci când pistonul se află la distanţa $l_3=3l_1$ de capătul inferior cilindrului;

BCU "AS" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

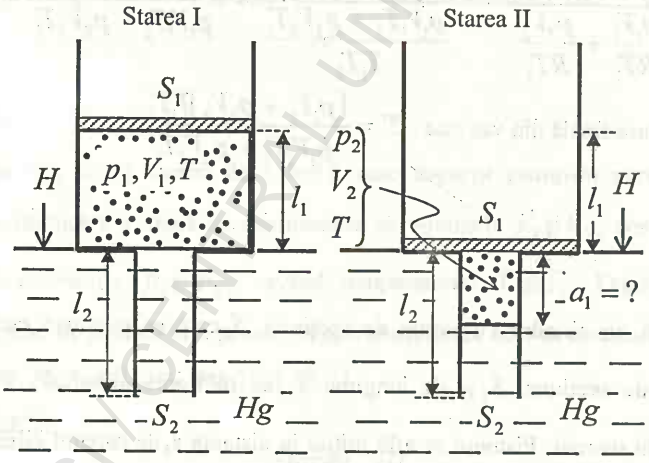
c) secțiunea S_1' a cilindrului pentru care aerul iese din tub ($a_1 = l_2$). Se consideră presiunea atmosferică H.

(Teste , Medicină Iași , pag 133/ 1999)



Rezolvare:

a) Varianta I: nu se ia în considerație densitatea mercurului ρ.



Din starea I în starea II, aerul suferă o transformare izotermă: $p_1V_1 = p_2V_2$

unde: $p_1 = H$, $V_1 = S_1l_1$; $p_2 = a_1 + H$ și $V_2 = S_2a_1$, toate mărimile de presiune le exprimă în mmcol. Hg iar lungimile mm. , încât relația $p_1V_1 = p_2V_2$ devine: $HS_1l_1 = (a_1 + H)S_2a_1 \rightarrow HS_1l_1 = S_2a_1^2 + HS_2a_1 \rightarrow$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\rightarrow S_2 a_1^2 + HS_2 a_1 - HS_1 l_1 = 0$ (ec. gr. II)

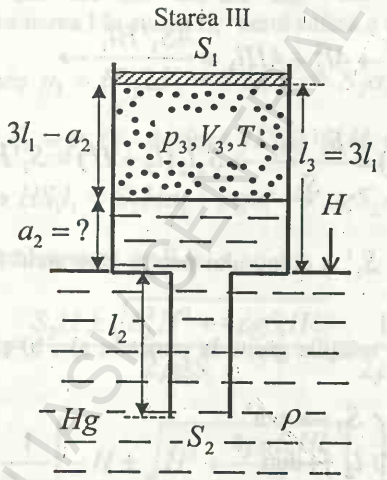
Rezolvarea ec. gr. II în a_1:

$$a_1 = \frac{-HS_2 \pm \sqrt{H^2 S_2^2 + 4S_1 S_2 H l_1}}{2S_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-HS_2}{S_2} \pm \sqrt{\frac{H^2 S_2^2}{S_2^2} + \frac{4S_1 S_2 H l_1}{S_2^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-H \pm \sqrt{H^2 + \frac{4S_1 H l_1}{S_2}}\right] \rightarrow$$ convine soluția cu (+) în fața radicalului $\rightarrow$

$$\rightarrow a_1 = \frac{1}{2}\left[-H + \sqrt{H^2 + \frac{4S_1 H l_1}{S_2}}\right].$$ Distanța a_1 pe care va coborî mercurul în tub este: $a_1 = \frac{1}{2}\left[-H + \sqrt{H^2 + \frac{4S_1 H l_1}{S_2}}\right]$ (1).

b) Din starea I în starea III, aerul suferă este o transformare izotermă:



$p_1 V_1 = p_3 V_3$ (1), unde:

$V_1 = S_1 l_1$,

$p_1 = H$

$p_3 + a_2 = H \rightarrow p_3 = H - a_2$

$V_3 = S_1(3l_1 - a_2)$. Substituind V_1, p_1, p_3 și V_3 în (1) obținem:

$HS_1 l_1 = (H - a_2) S_1 (3l_1 - a_2) \rightarrow$

$\rightarrow Hl_1 = 3Hl_1 - Ha_2 - 3l_1 a_2 + a_2^2 \rightarrow Hl_1 = 3Hl_1 - (H + 3l_1) a_2 + a_2^2 \rightarrow$

$\rightarrow a_2^2 - (H + 3l_1) a_2 + 2Hl_1 = 0$ (ec. gr. II)

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvarea ec. de gr. II în a_2 : $\rightarrow a_2 = \dfrac{(H+3l_1) \pm \sqrt{(H+3l_1)^2 - 8Hl_1}}{2}$

Convine soluția cu (+) din fața radicalului :

$$a_2 = \frac{(H+3l_1) + \sqrt{(H+3l_1)^2 - 8Hl_1}}{2}$$

Distanța a_2 pe care va urca mercurul în cilindru este :

$$a_2 = \frac{(H+3l_1) + \sqrt{(H+3l_1)^2 - 8Hl_1}}{2}$$

c) Pentru aflarea lui S_1' pentru ca aerul să iasă din tub trebuie ca $a_1 = l_2$ și $S_1 = S_1'$ și atunci avem: $l_2 = \dfrac{1}{2}\left(-H + \sqrt{H^2 + \dfrac{4S_1'Hl_1}{S_2}}\right) \rightarrow$

$\rightarrow 2l_2 + H = \sqrt{H^2 + \dfrac{4S_1'Hl_1}{S_2}}$. Se ridică relația la pătrat și obținem:

$$4l_2^2 + 4Hl_2 + H^2 = H^2 + \frac{4S_1'Hl_1}{S_2} \rightarrow 4l_2^2 + 4Hl_2 = \frac{4S_1'Hl_1}{S_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow l_2^2 + Hl_2 = \frac{S_1'Hl_1}{S_2} \rightarrow l_2(l_2+H) = \frac{S_1'Hl_1}{S_2} \rightarrow S_2l_2(l_2+H) = S_1'Hl_1$$

$\rightarrow S_1' = \dfrac{S_2l_2(l_2+H)}{Hl_1}$. Secțiunea S_1' a cilindrului pentru care aerul iese din tub este: $S_1' = \dfrac{S_2l_2(l_2+H)}{Hl_1}$. În relațiile găsite la punctele a) , b) și c) mărimile fizice trebuie exprimate în :

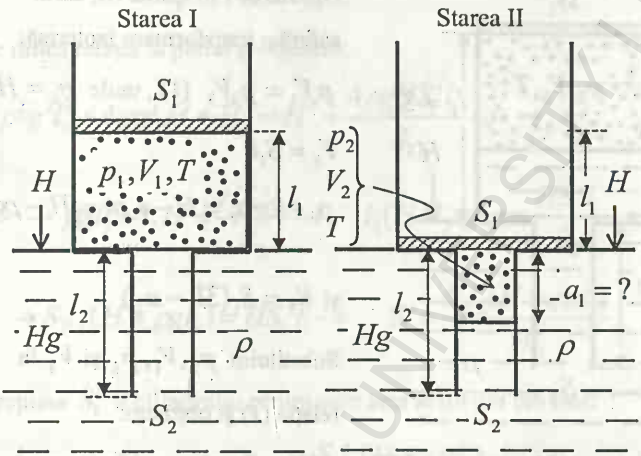
$$\begin{cases} S_2 \rightarrow \text{mm}^2 \\ l_2 \rightarrow \text{mm} \\ l_1 \rightarrow \text{mm} \\ H \rightarrow \text{mm col Hg} \\ S_1' \rightarrow \text{mm}^2 \end{cases}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Varianta II: se ia în considerație densitatea mercurului ρ.

Metoda de rezolvare este aceiași , dar calculele matematice sunt mai lungi, formulele apar mai complicate și timpul de rezolvare mai mare.

a)



Din starea I în starea II, aerul suferă o transformare izotermă $p_1V_1 = p_2V_2$,

unde $p_1 = H \quad V_1 = S_1l_1$, $V_2 = S_2a_1$, $p_2 = H + \rho g a_1$, încât relația :

$p_1V_1 = p_2V_2$ devine : $HS_1l_1 = (H + \rho g a_1)S_2a_1 \rightarrow$

$\rightarrow HS_1l_1 = S_2Ha_1 + \rho g S_2 a_1^2 \rightarrow \rho g S_2 a_1^2 + SHa_1 - HS_1l_1 = 0$ (ec. gr. II)

Rezolvarea ec. gr.II în a_1:

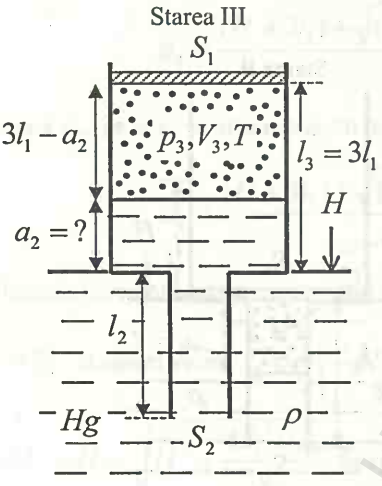
$$a_1 = \frac{S_2H \pm \sqrt{S_2^2H^2 + 4\rho g S_1 H l_1}}{2\rho g S_2} = \frac{1}{2\rho g}\left[\frac{-S_2H}{S_2} \pm \sqrt{\frac{S_2^2H^2}{S_2^2} + \frac{4\rho g S_1 H l_1}{S_2^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\rho g}\left[-H \pm \sqrt{H^2 + \frac{4\rho g S_1 H l_1}{S_2}}\right].$$ Convine soluția cu (+) din fața

radicalului, încât: $a_1 = \frac{1}{2\rho g}\left[-H + \sqrt{H^2 + \frac{4\rho g S_1 H l_1}{S_2}}\right]$

Distanța a_1 pe care va coborî mercurul în tub este:

$$a_1 = \frac{1}{2\rho g}\left[-H \pm \sqrt{H^2 + \frac{4\rho g S_1 H l_1}{S_2}}\right] \quad (1).$$



b)

Din starea I în starea III, aerul suferă o transformare izotermă:

$p_1V_1 = p_3V_3$ (1), unde $p_1 = H$, $V_1 = S_1l_1$

$p_3 + \rho g a_2 = H \rightarrow p_3 = H - \rho g a_2$

și $V_3 = S_1(3l_1 - a_2)$

Substituim p_2, V_1, p_3 și V_3 în relația (1) și obținem:

$$HS_1l_1 = S_1(3l_1 - a_2)(H - \rho g a_2) \rightarrow Hl_1 = H3l_1 - 3\rho g l_1 a_2 - Ha_2 + \rho g a_2^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho g a_2^2 - (H + 3\rho g l_1)a_2 + 2Hl_1 = 0 \text{ (ec. de gradul II)}$$

Rezolvarea ec. gr. II în a_2: $a_2 = \frac{H + 3\rho l_1 \pm \sqrt{(H + 3\rho g l_1)^2 - 8\rho g H l_1}}{2\rho g}$.

Convine soluția cu (+) în fața radicalului și atunci avem:

$$a_2 = \frac{H + 3\rho l_1 + \sqrt{(H + 3\rho g l_1)^2 - 8\rho g H l_1}}{2\rho g}.$$

Distanța a_2 pe care va urca mercurul în cilindru este :

$$a_2 = \frac{H + 3\rho l_1 + \sqrt{(H + 3\rho g l_1)^2 - 8\rho g H l_1}}{2\rho g}.$$

c) Pentru a afla S_1', încât aerul să iasă din tub trebuie ca $a_1 = l_2$ și $S_1 = S_1'$ încât, relația (1) de la punctul (a) devine:

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$l_2 = \frac{1}{2\rho g}\left[-H + \sqrt{H^2 + \frac{4\rho g H S_1' l_1}{S_2}}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\rho g l = -H + \sqrt{H^2 + \frac{4\rho g H S_1' l_1}{S_2}} \rightarrow \quad 2\rho g l + H = \sqrt{H^2 + \frac{4\rho g H S_1' l_1}{S_2}}$$

Se ridică relaţia la pătrat şi obţinem:

$$2\rho^2 g^2 l_2^2 + 4\rho g l_2 H + H^2 = H^2 + \frac{4\rho g H S_1' l_1}{S_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho g l_2^2 + l_2 H = \frac{H S_1' l_1}{S_2} \rightarrow \quad l_2(H + \rho g l_2) = \frac{H S_1' l_1}{S_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow S_2 l_2 (H + \rho g l_2) = H S_1' l_1 \rightarrow \quad S_1' = \frac{S_2 l_2 (H + \rho g l_2)}{H l_1}$$

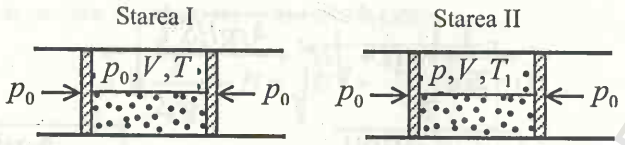
Secţiune S_1' a cilindrului pentru care iese aerul din tub este:

$$S_1' = \frac{S_2 l_2 (H + \rho g l_2)}{H l_1}$$

Când luăm în consideraţie densitatea ρ a mercurului, atunci toate mărimile S_2, l_2, H, ρ, g şi l_1 se exprimă în S.I., adică : $S_2 \rightarrow m^2$, $l_2 \rightarrow m$, $H \rightarrow \frac{N}{m^2}$, $g \rightarrow \frac{m}{s^2}$, $\rho \rightarrow \frac{Hg}{m^3}$, $l_1 \rightarrow m$.

37. Într-un tub cilindru orizontal, deschis la ambele capete, se află două pistoane uşoare, de secţiunea S, legate printr-un fir întins, care se pot mişca fără frecare. Presiunea şi temperatura aerului dintre cele două pistoane şi exterior sunt p_0 şi T. Până la ce temperatură T_1 poate fi încălzit aerul, limitat de cele două pistoane astfel ca firul ce leagă pistoanele între ele să nu se rupă? Tensiunea maximă suportată de fir este F. (Fizica cl. X , pag 41)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Din starea I în starea II, gazul are o transformare izocoră:

$$\frac{p_0}{T}=\frac{p}{T_1}\rightarrow T_1=\frac{pT}{p_0}\ (1) \qquad p=\frac{F_1}{S}\rightarrow F_1=pS\ ;$$

$$p_0=\frac{F_0}{S}\rightarrow F_1>F_0\rightarrow \quad \rightarrow F_1-F_0=F\rightarrow \text{tensiunea maximă în fir.}$$

$$pS-p_0S=F\rightarrow (p-p_0)S=F\rightarrow (p-p_0)=\frac{F}{S}\rightarrow p-p_0=\frac{F}{S}\rightarrow$$

$$\rightarrow p=p_0+\frac{F}{S}=\frac{Sp_0+F}{S}\rightarrow \quad p=\frac{Sp_0+F}{S}$$

Relația $p=\dfrac{Sp_0+F}{S}$ o substituim în (1) şi obţinem:

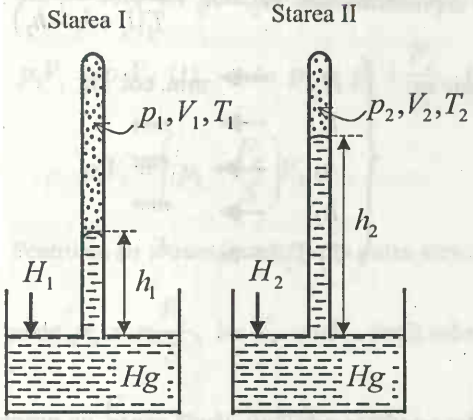
$$\rightarrow T_1=\frac{T}{p_0}\frac{Sp_0+F}{S}=\frac{T(Sp_0+F)}{p_0S}.$$

Pentru ca firul să nu se rupă în timpul încălzirii gazului trebuie ca temperatura

$$T_1\le\frac{T(Sp_0+F)}{p_0S}.$$

38. Într-un barometru cu mercur ce intră puţin aer, astfel ca la temperatura T_1 lungimea coloanei de mercur este h_1, lungimea camerei barometrice l_1 şi presiunea atmosferică H_1. În altă zi cu temperatura $T_2<T_1$, lungimea coloanei de mercur este h_2. Să se afle presiunea atmosferică H_2.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY



Rezolvare:

Aerul din camera barometrică suferă o transformare generală întrucât variază toţi parametri de presiune, volum şi temperatură, încât la trecerea din starea I în starea II scriem legea generală a gazelor :

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \quad (2)$$

La calcularea presiunilor p_1 şi p_2 se poate ţine seama de densitatea ρ a mercurului sau nu. În calcularea presiunilor p_1 şi p_2 nu se va ţine seama de densitatea ρ a mercurului, dar se va considera: H_1 în mmcol Hg, l_1, h_1 şi h_2 in mm, T_1 şi T_2 în K, iar H_2 se va exprima în mmcol Hg.

Din figură se constată: $p_1 + h_1 = H_1 \rightarrow p_1 = H_1 - h_1$,

$p_2 + h_2 = H_2 \rightarrow p_2 = H_2 - h_2$, $V_1 = Sl_1, V_2 = Sl_2$ şi

$$l_1 + h_1 = l_2 + h_2 \rightarrow l_2 = l_1 + h_1 - h_2$$

Mărimile fizice: p_1, p_2, V_1, V_2 şi l_2 le substituim în relaţia (1) şi obţinem:

$$\frac{(H_1 - h_1)Sl_1}{T_1} = \frac{(H_2 - h_2)S(l_1 + h_1 - h_2)}{T_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{(H_1 - h_1)l_1}{T_1} = \frac{(H_2 - h_2)(l_1 + h_1 - h_2)}{T_2} \rightarrow H_2 - h_2 = \frac{T_2(H_1 - h_1)l_1}{T_1(l_1 + h_1 - h_2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow H_2 = h_2 + \frac{T_2(H_1 - h_1)l_1}{T_1(l_1 + h_1 - h_2)}.$$

BCU "ŞTIINŢĂ" UNIVERSITY LIBRARY

Presiunea atmosferică H_2 cerută în problemă este: $H_2 = h_2 + \frac{T_2(H_1 - h_1)l_1}{T_1(l_1 + h_1 - h_2)}$.

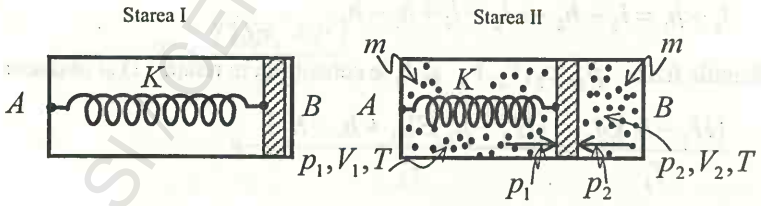
Atenție la aflarea valorii H_2 trebuie ca:

$$\begin{cases} H_2 \rightarrow \text{mm. col. Hg} \\ l_1 \rightarrow mm \\ h_1 \rightarrow mm \\ h_2 \rightarrow mm \\ T_1\, T_2 \rightarrow K \end{cases}$$

39. Într-un cilindru orizontal, vidat se află în echilibru, lângă capac, un piston prins printr-un resort elastic nedeformat, de celălalt capac. Se introduc mase egale de gaz de o parte şi de cealaltă a pistonului astfel încât raporturile volumelor ocupate de gaz din partea stângă şi dreaptă a pistonului este K, ştiind că prin vidarea completă a compartimentului cu resort, volumul compartimentului din dreapta creste de n ori, valoarea raportului K este dată de:

(Teste Medicină Iaşi , pag.128 /1999)

Rezolvare:



Scriem ecuaţia Clapeyron-Mendeleev pentru compartimentul A:

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$p_1V_1 = \nu RT$ şi compartimentul B: $p_2V_2 = \nu RT$ şi din care rezultă: $p_1V_1 = p_2V_2$ (1), unde $p_2 = p_1 + \frac{F_e}{S}$, încât relaţia (1) devine :

$$p_1V_1 = \left(p_1 + \frac{F_e}{S}\right)V_2.$$

Pentru un şir n transformări, vom putea scrie: $p_1V_1 = p_2V_2 = ... = p_nV_n$ (2), unde $p_n = n\frac{F_e}{S}$, iar $V_n = nV_2$, încât substituind: $p_2 = p_1 + \frac{F_e}{S}$, $p_n = n\frac{F_e}{S}$ şi $V_n = nV_2$, relaţia (2), devine: $p_1V_1 = \left(p_1 + \frac{F_e}{S}\right)V_2 = ... = n^2\frac{F_e}{S}V_2$.

Întrucât, avem un şir de egalităţi, vom considera doar: $\left(p_1 + \frac{F_e}{S}\right)V_2 = n^2\frac{F_e}{S}V_2 \rightarrow$

$$\rightarrow p_1 + \frac{F_e}{S} = n^2\frac{F_e}{S} \rightarrow \quad p_1 = \frac{F_e}{S}(n^2 - 1) \rightarrow \frac{F_e}{S} = \frac{p_1}{(n^2 - 1)}.$$

Substituind $\frac{F_e}{S} = \frac{p_1}{(n^2 - 1)}$ în $p_1V_1 = \left(p_1 + \frac{F_e}{S}\right)V_2$, obţinem :

$$p_1V_1 = \left(p_1 + \frac{p_1}{(n^2 - 1)}\right)V_2 \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 1 + \frac{1}{n^2 - 1} \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{n^2 - 1 + 1}{n^2 - 1} = \frac{n^2}{n^2 - 1}$$

Cum $\frac{V_1}{V_2} = K$, rezultă că $K = \frac{n^2}{n^2 - 1}$.

Valoarea raportului K cerut în problemă este: $K = \frac{n^2}{n^2 - 1}$.

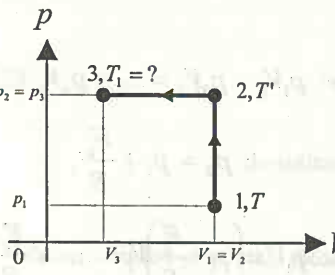
40. Se consideră o cantitate ν Kmoli de gaz ideal monoatomic aflat la temperatura T. Din această stare este încălzit izocor şi apoi răcit izobar până la

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

temperatura T_1. Ştiind că în cele două procese căldura schimbată între gaz şi mediu are, în modul, aceiaşi valoare Q, temperatura T_1 este dată de :

(Teste , Medicină Iaşi , pag.134 / 1999)

Rezolvare:



1-2 transformarea izocoră (încălzire).

2-3 comprimare izobară (răcire).

Se dă : $Q_{12} = |Q_{23}| = Q$ şi se cere temperatura T_1. Căldura absorbită

$$Q_{12} = Q = \nu C_V (T' - T)$$

Cum $C_V = \frac{3}{2}R$, atunci $Q = \frac{3\nu R}{2}(T' - T) \rightarrow (T' - T) = \frac{3Q}{3\nu R} \rightarrow$

$$\rightarrow T' = T + \frac{2Q}{3\nu R}.$$

Căldura cedată: $Q_{23} = \nu C_V (T_1 - T') = -\nu C_V (T' - T_1)$.

Dar $C_p = C_v + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5R}{2}$, încât: $Q_{23} = Q = \nu \frac{5R}{2}(T' - T_1)$.

Cum $\rightarrow T' = T + \frac{2Q}{3\nu R}$ obţinem : $Q = \frac{5\nu R}{2}(T + \frac{2Q}{3\nu R} - T_1) \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{2Q}{5\nu R} = T + \frac{2Q}{3\nu R} - T_1 \rightarrow T_1 = T + \frac{2Q}{3\nu R} - \frac{2Q}{5\nu R} = T + \frac{2Q}{\nu R}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) =$$

$$= T + \frac{2Q}{\nu R}\left(\frac{5-3}{15}\right) = T + \frac{4Q}{15\nu R}.$$

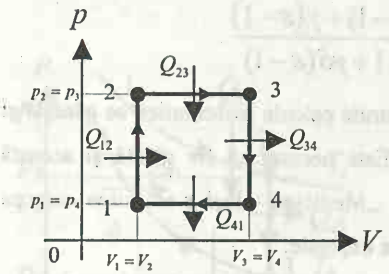
Temperatura finală T_1 este : $T_1 = T + \frac{4Q}{15\nu R}$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

41. Un mol de gaz cu exponentul adiabatic γ suferă o transformare ciclică formată din două izocore şi două izobare. Cunoscând rapoartele de compresie $\varepsilon = \frac{V_4}{V_1}$ şi $\delta = \frac{p_2}{p_1}$, randamentul ciclului este dat de relaţia:

(Teste, Medicină Iaşi, pag.135 /1999)

Rezolvare:



Se cunosc: $\varepsilon = \frac{V_4}{V_1}$, $\delta = \frac{p_2}{p_1}$ şi $C_p = \gamma C_V$ Pentru calcularea lui $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$, trebuiesc aflate $|Q_2|$ şi Q_1.

Aflarea lui : $Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \nu C_V (T_2 - T_1) + \nu C_p (T_3 - T_2) =$

$= \nu \left[C_V (T_2 - T_1) + \gamma C_V (T_3 - T_2) \right] = \nu C_V [T_2 - T_1 + \gamma (T_3 - T_2)]$.

Aflarea lui : $|Q_2| = |Q_{34}| + |Q_{41}| = \nu C_V (T_3 - T_4) + \nu C_p (T_4 - T_1) =$

$= \nu C_V (T_3 - T_4) + \nu \gamma C_V (T_4 - T_1) = \nu C_V \left[T_3 - T_4 + \gamma (T_4 - T_1) \right]$.

$|Q_2| = \nu C_V \left[(T_3 - T_4) + \gamma (T_4 - T_1) \right]$ şi $Q_1 = \nu \left[C_V (T_2 - T_1) + \gamma (T_3 - T_2) \right]$.

Substituind în formula randamentului η, obţinem:

$$\eta = 1 - \frac{\nu C_V \left[(T_3 - T_4) + \gamma (T_4 - T_1) \right]}{\nu C_V \left[(T_2 - T_1) + \gamma (T_3 - T_2) \right]} = 1 - \frac{(T_3 - T_4) + \gamma (T_4 - T_1)}{(T_2 - T_1) + \gamma (T_3 - T_2)} \quad (1).$$

Pentru izocora 1-2 : $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1 = \delta T_1 \rightarrow T_2 = \delta T_1$.

Pentru izobara 2-3 : $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \rightarrow T_3 = \frac{V_3}{V_2} T_2 = T_2 \frac{V_4}{V_1} = T_2 \delta =$

$= \varepsilon T_1 \delta \rightarrow T_3 = \varepsilon \delta T_1$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru izocora 3-4 : $\frac{p_3}{T_3}=\frac{p_4}{T_4}\rightarrow T_4=T_3\frac{p_4}{p_3}=T_3\frac{p_1}{p_2}=\varepsilon\delta T_1\frac{1}{\delta}=\varepsilon T_1$.

Cunoscând temperaturile : $T_2=\delta T_1, T_3=\varepsilon\delta T_1$ şi $T_4=\varepsilon T_1$ şi introducându-le în relaţia (1) obţinem:

$$\eta=1-\frac{\varepsilon\delta T_1-\varepsilon T_1+\left(\varepsilon T_1-T_1\right)}{\delta T_1-T_1+\gamma(\varepsilon\delta T_1-\delta T_1)}=1-\frac{\varepsilon(\delta-1)+\gamma\left(\varepsilon-1\right)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}.$$

Randamentul ciclului este : $\eta=1-\frac{\varepsilon(\delta-1)+\gamma\left(\varepsilon-1\right)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}$.

Aducând la acelaşi numitor şi făcând anumite calcule matematice se găseşte şi o altă formă a randamentului ciclului. Este necesar să fie găsită şi această relaţie căci la examenul de admitere la „Medicină'' Iaşi s-ar putea cere ca rezultate la complementul grupat şi a doua expresie:

$$\eta=1-\frac{\varepsilon(\delta-1)+\gamma\left(\varepsilon-1\right)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}=\frac{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)-\varepsilon(\delta-1)-\gamma\left(\varepsilon-1\right)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}=$$

$$=\frac{(\delta-1)(1-\varepsilon)+(\varepsilon-1)(\gamma\delta-\delta)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}=\frac{(\delta-1)(1-\varepsilon)+(\varepsilon-1)\gamma(\delta-1)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}=$$

$$=\frac{-(\delta-1)(\varepsilon-1)+(\varepsilon-1)\gamma(\delta-1)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}=\frac{(\varepsilon-1)(\delta-1)(-1+\gamma)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}=$$

$$=\frac{(\varepsilon-1)(\delta-1)(\gamma-1)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}\rightarrow$$ a doua relaţie a randamentului ciclului este:

$$\eta=\frac{(\varepsilon-1)(\delta-1)(\gamma-1)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}.$$

Cele două relaţii ale randamentului ciclului sunt:

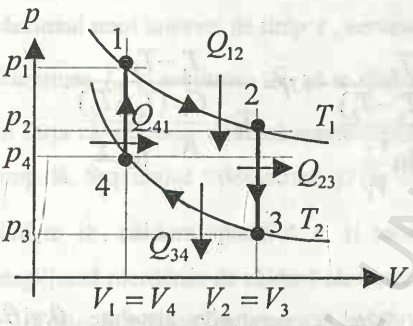
$$\eta=1-\frac{\varepsilon(\delta-1)+\gamma\left(\varepsilon-1\right)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}\quad\text{şi}\quad\eta=\frac{(\varepsilon-1)(\delta-1)(\gamma-1)}{\delta-1+\gamma\delta(\varepsilon-1)}.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

42. O maşină termică funcţionează după un ciclu format două izoterme de temperaturi T_1 şi T_2 $(T_1 > T_2)$ şi două izocore de volum V_1 şi V_2 $(V_1 < V_2)$. Cunoscând constanta R şi căldura molară la volum constant C_V pentru substanţa de lucru, randamentul maşinii se calculează din relaţia:

(Teste, Medicină Iaşi, pag 135 /1999)

Rezolvare:



LA aflarea randamentului maşinii termicii ce funcţionează după ciclul reprezentat în figura alăturată, ne folosim formula randamentului:

$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$ unde trebuiesc calculate $|Q_2|$ şi Q_1.

Mai întâi găsirea relaţiilor căldurilor absorbite şi cedate de-a lungul ciclului închis şi reversibil 12341.

$$Q_{12} = L_{12} = \nu RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1};\quad Q_{23} = \nu C_V(T_2 - T_1) = -\nu C_V(T_1 - T_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow |Q_{23}| = \nu C_V(T_1 - T_2);\quad Q_{34} = L_{34} = \nu RT_2 \ln\frac{V_1}{V_2} = -\nu RT_2 \ln\frac{V_2}{V_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow |Q_{34}| = \nu RT_2 \ln\frac{V_2}{V_1};\quad Q_{41} = \nu C_V(T_1 - T_2).$$

Căldura absorbită de-a lungul ciclului: $Q_1 = \upsilon\left[RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + C_v(T_1 - T_2)\right]$.

Căldura cedată de-a lungul ciclului:

$$|Q_2| = |Q_{23}| + |Q_{34}| = \nu C_V(T_1 - T_2) + \nu RT_2 \ln\frac{V_2}{V_1} = \nu\left[C_V(T_1 - T_2) + RT_2 \ln\frac{V_2}{V_1}\right].$$

Cunoscând pe Q_1 şi Q_2, atunci expresia randamentului devine:

ROMANIAN CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\eta=1-\frac{|Q_2|}{Q_1}=1-\frac{\nu\left[C_V(T_1-T_2)+RT_2\ln\frac{V_2}{V_1}\right]}{\nu\left[RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}+C_V(T_1-T_2)\right]}=1-\frac{C_V(T_1-T_2)+RT_2\ln\frac{V_2}{V_1}}{RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}+C_V(T_1-T_2)}=$$

$$=\frac{RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}+C_V(T_1-T_2)-C_V(T_1-T_2)-RT_2\ln\frac{V_2}{V_1}}{RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}+C_V(T_1-T_2)}=\frac{RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}-RT_2\ln\frac{V_2}{V_1}}{RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}+C_V(T_1-T_2)}=$$

$$=\frac{(T_1-T_2)R\ln\frac{V_2}{V_1}}{RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}+C_V(T_1-T_2)}=\frac{T_1-T_2}{T_1+\frac{C_V(T_1-T_2)}{R\ln\frac{V_2}{V_1}}}\rightarrow\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1+\frac{C_V}{R}\frac{(T_1-T_2)}{\ln\frac{V_2}{V_1}}}.$$

43. Un motor termic funcţionează între temperaturile absolute θ_1 şi θ_2 ($\theta_1<\theta_2$) iar randamentul său este egal cu a n-a parte din randamentul unui motor care ar funcţiona după un ciclu ideal, între aceleaşi temperaturi. Ştiind că puterea calorică q a combustibilului utilizat şi valoarea W a lucrului mecanic produs de către motor, cantitatea de combustibil consumată este:

(Test, Medicină Iaşi, pag.135 /1999)

Rezolvare:

Randamentul unui motor termic are formula $\eta=\frac{L}{Q_1}=\frac{W}{mq}$.

Randamentul Carnot are formula: $\eta_{Carnot}=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{\theta_1}{\theta_2}$.

Cum în problemă $\eta=\frac{1}{n}\eta_{Carnot}$, atunci: $\frac{W}{mq}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)\rightarrow$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$nW = mq\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2}\right) \rightarrow \quad nW\theta_2 = mq(\theta_2 - \theta_1) \rightarrow m = \frac{nW\theta_2}{q(\theta_2 - \theta_1)}.$$

44. Un motor termic ideal, cu puterea utilă P, funcţionează după un ciclu Carnot între temperaturile T_1 şi T_2 $(T_2 < T_1)$.

Ştiind că o fracţiune f din cantitatea de căldură cedată sursei reci, în decursul unui interval de timp t, serveşte pentru încălzirea unei bare de oţel cu lungimea l_0 şi secţiunea S, să se determine creşterea Δt a temperaturii barei şi forţa care trebuie aplicată acesteia pentru a-i menţine nemodificată lungimea iniţială. Se cunosc : densitatea ρ (în condiţii normale), coeficientul dilatării liniare α, căldura specifică c şi modulul de elasticitate E pentru oţel. Se neglijează pierderile de căldură ale barei faţă de mediu ambiant.

(Teste, Medicină Iaşi, pag 135 / 1999)

Rezolvare:

Pentru a afla Δt se pleacă de la ipoteză data în problemă precum că o fracţiune f de căldură cedată sursei reci, în decursul unui interval de timp t serveşte la încălzirea barei:

$$f|Q_2| = mc\Delta t \rightarrow f|Q_2| = V\rho c\Delta t \rightarrow f|Q_2| = Sl_0\rho c\Delta t \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta t = \frac{f|Q_2|}{Sl_0\rho c}.$$

Dar $\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \rightarrow 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \rightarrow$

$$\rightarrow |Q_2| = Q_1\frac{T_2}{T_1}.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum $P=\frac{L}{t}=\frac{Q_1-|Q_2|}{t}\rightarrow Pt=Q_1-|Q_2|\rightarrow Q_1=Pt+|Q_2|$

Substituim pe $Q_1=Pt+|Q_2|$ în $|Q_2|=Q_1\frac{T_2}{T_1}$ şi obţinem:

$$|Q_2|=(Pt+|Q_2|)\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_2}{T_1}Pt+\frac{T_2}{T_1}|Q_2|\rightarrow|Q_2|-\frac{T_2}{T_1}|Q_2|=\frac{T_2}{T_1}Pt\rightarrow$$

$$\rightarrow|Q_2|\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)=\frac{T_2}{T_1}Pt\rightarrow|Q_2|\left(\frac{T_1-T_2}{T_1}\right)=\frac{T_2Pt}{T_1}\rightarrow$$

$\rightarrow|Q_2|(T_1-T_2)=T_2Pt\rightarrow|Q_2|=\frac{T_2Pt}{T_1-T_2}$. Cunoscând $|Q_2|=\frac{T_2Pt}{T_1-T_2}$

şi substituim în $\rightarrow\Delta t=\frac{f|Q_2|}{Sl_0\rho c}$ avem: $\rightarrow\Delta t=\frac{T_2Ptf}{Sl_0\rho c}\frac{1}{T_1-T_2}$

Creşterea temperaturii barei va fi : $\rightarrow\Delta t=\frac{T_2Ptf}{Sl_0\rho c(T_1-T_2)}$.

Forţa necesară nemodificării lungimii barei se află din relaţia efortului unitar:

$$\frac{F}{S}=E\alpha\Delta t=E\alpha\frac{T_2Ptf}{Sl_0\rho c(T_1-T_2)}\rightarrow F=\frac{E\alpha T_2Ptf}{l_0\rho c(T_1-T_2)}.$$

Forţa necesară nemodificării lungimii barei este: $F=\frac{E\alpha T_2Ptf}{l_0\rho c(T_1-T_2)}$.

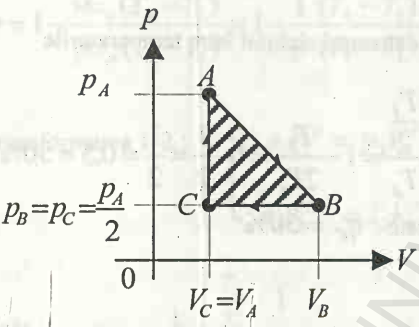
45. Un kilomol de oxigen efectuează ciclul reversibil ABCA de forma unui triunghi, în care BC este o transformare izobară şi CA o transformare izocoră. Ştiind că presiunea în starea A este p_A, în starea C este $p_C=\frac{p_A}{2}$, iar volumul gazului în starea B este dublul volumului în starea A ($V_B=2V_A$), să

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

se determine lucrul mecanic L produs la efectuarea ciclului, variaţia energiei interne ΔU şi randamentul unui ciclu Carnot care ar funcţiona între temperaturile extreme T_A şi T_C.

(Teste, Medicină Iaşi , pag.136 /1999)

Rezolvare:



a) Aflarea lucrului mecanic în timpul ciclului:

$$L = aria ABCA = \frac{(V_B - V_A)(p_A - p_C)}{2} = \frac{(2V_A - V_A)\left(p_A - \frac{p_A}{2}\right)}{2} = \frac{V_A p_A}{4}$$

Lucrul mecnic efectuat în timpul ciclului este: $L = \frac{V_A p_A}{4}$

b) Aflarea energiei interne : $\Delta U = U_B - U_C =$

$= \frac{3}{2}\nu R T_B - \frac{3}{2}\nu R T_A = \frac{3}{2}\nu R(T_B - T_A)$. Pentru calcularea relaţiei dintre T_B şi T_A, scriem legea generală din starea A în starea B.

$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B}$. Dar $V_B = 2V_A$ şi $p_B = p_C = \frac{p_A}{2}$, încât:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{\frac{p_A}{2} 2V_A}{T_B} \rightarrow \quad T_A = T_B.$$

Cum $T_B = T_A$, atunci $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_A - T_A) = 0$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Variația energiei interne este : $\Delta U = 0$

c) randamentul ciclului Carnot se găsește cu formula : $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

Calcularea lui T_C: vom aplica legea generală între stările C și A:

$$\frac{p_c V_A}{T_C} = \frac{p_A V_A}{T_A} \rightarrow \quad \frac{p_c}{T_C} = \frac{p_A}{T_A} \rightarrow \quad T_c = \frac{p_c T_A}{p_A} = \frac{p_A}{2}\frac{T_A}{p_A} \rightarrow$$

$$\rightarrow T_C = \frac{T_A}{2}.$$ Întrucât se cere randamentul ciclului între temperaturile

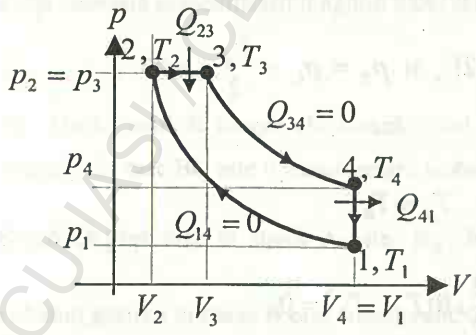
extreme T_A și T_C, atunci $\eta_C = 1 - \frac{\frac{T_A}{2}}{T_A} = 1 - \frac{T_A}{2T_A} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

Randamentul ciclului Carnot cerut este : $\eta_C = 50\%$

46. Se consideră un motor termic care funcționează după ciclul din figura alăturată unde 3-4 și 1-2 sunt transformări adiabatice. Cunoscând exponentul adiabatic γ și rapoartele de compresie $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ și $\rho = \frac{V_3}{V_2}$, randamentul motorului este dat de relația:

(Teste, Medicină Iași, pag.136 /1999)

Rezolvare:



Pentru aflarea randamentului ciclului 12341, folosim formula: $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$.

Din figură: $Q_{12} = 0$,

$Q_{23} = \nu C_p (T_3 - T_2)$

$Q_{34} = 0$,

$Q_{41} = \nu C_V (T_1 - T_4)$. $Q_1 = Q_{23} = \nu C_p (T_3 - T_2) \rightarrow$ căldura primită şi $|Q_2| = |Q_{41}| = \nu C_v (T_4 - T_1) \rightarrow$ căldura cedată. Se substituie Q_1 şi $|Q_2|$ în $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$ şi obţinem :

$$\eta = 1 - \frac{\nu C_v (T_4 - T_1)}{\nu C_p (T_3 - T_1)} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_1)} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}.$$

Transformarea 1-2 : $\begin{cases} p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} \\ T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_2 V_2^{\gamma - 1} \end{cases} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} = \frac{1}{\varepsilon^{\gamma - 1}}$

încât : $\eta = 1 - \frac{1}{\gamma \varepsilon^{\gamma - 1}} \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1}$.

Transformarea 2-3 : $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \rightarrow \frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2} \rightarrow \rho = \frac{T_3}{T_2}$, iar

$$\eta = 1 - \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\gamma \varepsilon^{\gamma - 1} (\rho - 1)}.$$

Transformarea 3-4 : $\begin{cases} p_3 V_3^{\gamma} = p_4 V_4^{\gamma} \\ T_3 V_3^{\gamma - 1} = T_4 V_4^{\gamma - 1} \rightarrow T_3 V_3^{\gamma - 1} = T_4 V_4^{\gamma - 1} \end{cases}$ şi din relaţia $T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_2 V_2^{\gamma - 1}$ (din transformarea 1-2) avem sistemul:

$\begin{cases} T_3 V_3^{\gamma - 1} = T_4 V_4^{\gamma - 1} \\ T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_2 V_2^{\gamma - 1} \end{cases}$. Făcând raportul relaţiilor obţinem:

$\frac{T_3}{T_2} \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{\gamma - 1} = \frac{T_4}{T_1} \left(\frac{V_4}{V_1} \right)^{\gamma - 1}$, unde $V_4 = V_1$, $\frac{T_3}{T_2} = \rho$ şi $\frac{V_3}{V_2} = \rho$, atunci

BUJIAC / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

obținem: $\rho(\rho)^{\gamma-1} = \frac{T_4}{T_1} \rightarrow \frac{T_4}{T_1} = \rho^{\gamma}$. Înlocuind $\frac{T_4}{T_1} = \rho^{\gamma}$ în

$$\eta = 1 - \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\gamma\varepsilon^{\gamma-1}(\rho-1)} = 1 - \frac{\rho^{\gamma}-1}{\gamma\varepsilon^{\gamma-1}(\rho-1)}.$$

Relația randamentului ciclului este: $\eta = 1 - \frac{\rho^{\gamma}-1}{\gamma\varepsilon^{\gamma-1}(\rho-1)}$.

47. Obară de oțel având masa $m = 4kg$ și lungimea $l_1 = 50cm$ la temperatura t, în urma primirii unei cantități de căldură $Q = 1040J$. Cunoscând densitatea barei la 0^0C, $\rho_0 = 7800kg/m^3$, căldura specifică $c = 502\,J/kgK$ și coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 12 \bullet 10^{-6}K^{-1}$, să se determine: temperatura t la care ajunge după încălzire, lungimea l a barei aflată la temperatura t și densitatea ρ a acesteia la temperatura finală.

(Teste, Medicină Iași, pag 136 /1999)

Rezolvare:

a) $Q = mc(t - t_1) \rightarrow t - t_1 = \frac{Q}{mc} \rightarrow t = \frac{Q}{mc} + t_1$

Numeric: $t = \frac{1040000}{4 \bullet 502} - 20 = 51,7^0C$

b) $\begin{cases} l = l_0(1+\alpha t) \\ l_1 = l_0(1+\alpha t_1) \rightarrow \end{cases} \quad \frac{l}{l_1} = \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1} \rightarrow l = l_1 \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1}$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Numeric : $l = 0{,}5\dfrac{1+12\bullet10^{-6}}{1-12\bullet10^{-6}\bullet20} = 0{,}503m$.

c) $\rho = \dfrac{\rho_0}{1+\gamma t} = \dfrac{\rho_0}{1+3\alpha t} = \dfrac{7800}{1+3\bullet12\bullet10^{-6}\bullet51{,}7} = 7656\dfrac{kg}{m^3}$.

Rezultatele problemei sunt: $\begin{cases} t = 51{,}7^0C \\ l = 0{,}503m \\ \rho = 7656\dfrac{kg}{m^3} \end{cases}$

48. Să se determine lungimile l_{01} şi l_{02} la 0^0C, a două bare, care încălzite la aceiaşi temperatură (oricare ar fi ea) păstrează totdeauna o diferenţă de lungime Δl constantă. Coeficienţii de dilatare liniară corespunzători celor două bare sunt α_1 şi respectiv , α_2 $(\alpha_1 > \alpha_2)$.

(Teste, Medicină Iaşi , pag.136 /1999)

Rezolvare:

Plecăm de la formula de definiţie a coeficienţilor : $\alpha_1 = \dfrac{\Delta l}{l_{01}t}$ şi $\alpha_2 = \dfrac{\Delta l}{l_{02}t} \rightarrow$

$\rightarrow \Delta l = \alpha_1 l_{01} t$ şi $\rightarrow \Delta l = \alpha_2 l_{02} t \rightarrow$ $t = \dfrac{\Delta l}{\alpha_1 l_{01}}$ şi $t = \dfrac{\Delta l}{\alpha_2 l_{02}}$

Cum alungirile Δl sunt egale obţinem: $\alpha_1 l_{01} t = \alpha_2 l_{02} t \rightarrow \alpha_1 l_{01} = \alpha_2 l_{02}$

Dar $\Delta l = l_1 - l_2 = l_{01}(1+\alpha_1 t) - l_{02}(1+\alpha_2 t) =$

$= l_{01}(1+\alpha_1 \dfrac{\Delta l}{\alpha_1 l_{01}}) - l_{02}(1+\alpha_2 \dfrac{\Delta l}{\alpha_2 l_{02}}) = l_{01}(1+\dfrac{\Delta l}{l_{01}}) - l_{02}(1+\dfrac{\Delta l}{l_{02}}) =$

$= l_{01} + \dfrac{l_{01}\Delta l}{l_{01}} - l_{02} - \dfrac{l_{02}\Delta l}{l_{02}} = l_{01} + \Delta l - l_{02} - \Delta l = l_{01} - l_{02} \rightarrow$

BCUAŞ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\rightarrow \Delta l = l_{01} - l_{02}$

Avem sistemul : $\begin{cases} \Delta l = l_{01} - l_{02} \\ \alpha_1 l_{01} = \alpha_2 l_{02} \end{cases}$. Necunoscute sunt: l_{01} şi l_{02}.

Din ecuaţia a doua a sistemului: $l_{02} = \dfrac{\alpha_1 l_{01}}{\alpha_2}$ şi substituind în prima ecuaţie a

sistemului avem: $\Delta l = l_{01} - \dfrac{\alpha_1 l_{01}}{\alpha_2} = l_{01}(1 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}) = \dfrac{l_{01}(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_2} \rightarrow$

$\rightarrow l_{01} = \dfrac{\alpha_2 \Delta l}{\alpha_2 - \alpha_1}$. Mărimea fizică $l_{01} = \dfrac{\alpha_2 \Delta l}{\alpha_2 - \alpha_1}$, o substituim în:

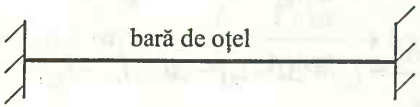
$$l_{02} = \frac{\alpha_1 l_{01}}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\alpha_2 \Delta l}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\alpha_1 \Delta l}{\alpha_2 - \alpha_1} \rightarrow l_{02} = \frac{\alpha_1 \Delta l}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Cele două lungimi l_{01} şi l_{02} la $0^0 C$ sunt:

$$l_{01} = \frac{\alpha_2 \Delta l}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad \text{şi} \quad l_{02} = \frac{\alpha_1 \Delta l}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

49. Fie o bara de oţel, cu secţiunea de $10 cm^2$, fixată la capete, de câte un suport rigid. Temperatura barei în momentul fixării este $15^0 C$. Cunoscând modulul de elasticitate $E = 22 \bullet 10^{10} \, N/m^2$ şi coeficientul de dilatare termică liniară pentru oţel $\alpha = 11 \bullet 10^{-6} k^{-1}$, să se determine efortul unitar exercitat de bară asupra suporţilor, în condiţiile în care acesta este încălzită la temperatura $115^0 C$. (Teste, Medicină Iaşi, pag.136 /1999)

Rezolvare:



BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ştim că formula efortului unitar este : $\frac{F}{S} = E\alpha\Delta t = E\alpha(t_2 - t_1)$

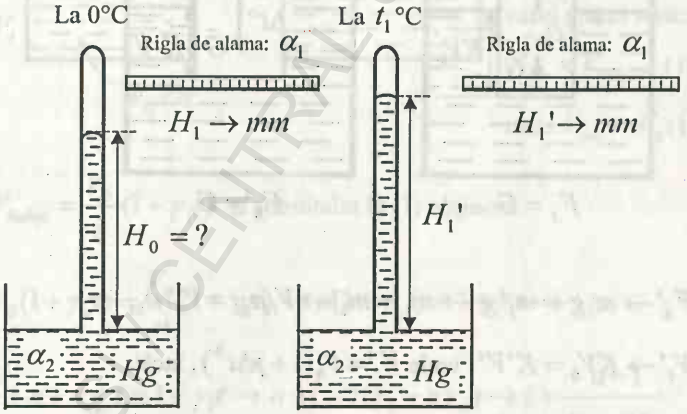
Numeric : $\frac{F}{S} = 22 \bullet 10^{10} \bullet 11 \bullet 10^{-6}(115-15) = 242 \bullet 10^4 \bullet 10^2 =$

$= 242 \bullet 10^6 \frac{N}{m^2}$. Efortul unitar este: $\frac{F}{S} = 242 \bullet 10^6 \frac{N}{m^2}$.

50. Lungimea coloanei de mercur dintr-un barometru, măsurată cu o riglă de alamă la temperatura t_1 este H_1 diviziuni, ştiind că rigla a fost etalonată la temperatura $t_0 = 0^0 C$ şi cunoscând coeficienţii α_1 pentru alamă şi α_2 pentru mercur, lungimea coloanei de mercur la $0^0 C$ este dată de:

(Teste, Medicină Iaşi , pag.137 /1999)

Rezolvare:



Pentru dilatarea riglei: $H_1' = H_1(1+\alpha_1 t_1)$ iar pentru dilatarea mercurului:

$H_1' = H_0(1+\alpha_2 t_1)$. Cum $H_1' = H_1' \rightarrow H_1(1+\alpha_1 t_1) = H_0(1+\alpha_2 t_1) \rightarrow$

$\rightarrow H_0 = \frac{H_1(1+\alpha_1 t_1)}{1+\alpha_2 t_1}$.

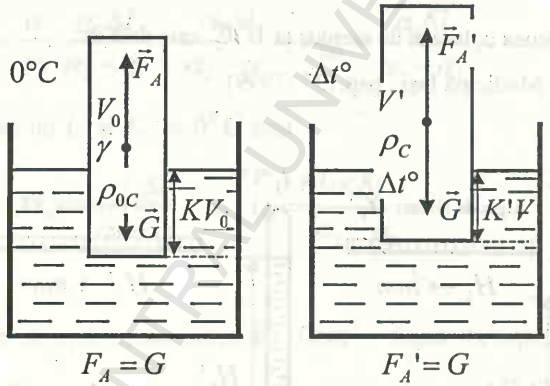
BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Lungimea coloanei de mercur la $0^0 C$ este de: $H_0 = \frac{H_1(1+\alpha_1 t_1)}{1+\alpha_2 t_1}$.

51. Se consideră un corp solid având coeficientul de dilatare volumică γ, care pluteşte într-un lichid, astfel încât la temperatura $t_0 = 0^0 C$, procentul din volumul corpului aflat în apă este K. Dacă temperatura lichidului se menţine constantă, iar cea a corpului creşte cu Δt grade, procentul de scufundare a corpului în lichid va fi:

(Teste, Medicină Iaşi, pag.137 /1999)

Rezolvare:



$F_A = F_A' \rightarrow m_l g = m_l' g \rightarrow m_l = m_l' \rightarrow V_l \rho_{0l} = V_l' \rho_{0l} \rightarrow$

$\rightarrow V_l = V_l' \rightarrow KV_0 = K'V'$ unde $V_l' = V_0(1+\gamma\Delta t^0)$, încât:

$$\rightarrow KV_0 = K'V_0(1+\gamma\Delta t^0) \rightarrow K = K'(1+\gamma\Delta t^0) \rightarrow K' = \frac{K}{1+\gamma\Delta t^0}.$$

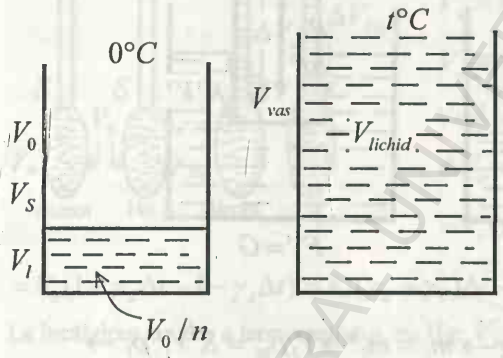
Procentul de scufundare a corpului în lichid este: $K' = \frac{K}{1+\gamma\Delta t^0}$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

52. Se consideră un vas de sticlă având volumul V_0 la temperatura 0^0C. În vas se introduce un lichid, având coeficientul de dilatare γ_l, care ocupă un volum egal cu $\frac{V_0}{n}$. Cunoscând coeficientul de dilatare al sticlei γ_s, temperatura la care lichidul umple vasul este:

(Teste, Medicină Iaşi, pag.137 /1999)

Rezolvare:



Când s-a ridicat temperatura sistemului de la 0^0C la t^0C, s-a dilatat şi vasul de sticlă şi lichidul şi cum lichidul ocupă în întregime vasul putem scrie:

$$V_{vas} = V_{lichid} \quad (1)$$

unde $V_{vas} = V_0(1+\gamma_s t)$ şi

$V_{lichid} = \frac{V_0}{n}(1+\gamma_l t)$ şi substituim în (1) obţinem:

$$V_0(1+\gamma_s t) = \frac{V_0}{n}(1+\gamma_l t) \rightarrow n(1+\gamma_s t) = 1+\gamma_l t \rightarrow$$

$$\rightarrow n+n\gamma_s t = 1+\gamma_l t \rightarrow n-1 = t(\gamma_l - n\gamma_s) \rightarrow t = \frac{n-1}{\gamma_l - n\gamma_s}.$$

Temperatura la care lichidul prin încălzire umple complet vasul este:

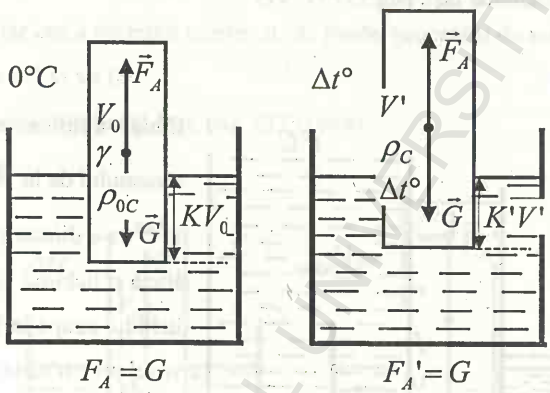
$$t = \frac{n-1}{\gamma_l - n\gamma_s}.$$

BCU "AUREL VLAICU" UNIVERSITY LIBRARY

53. Un corp solid , având coeficientul de dilatare γ_1 se scufundă la $0^0 C$, un procent K din volumul său, într-un lichid care are coeficientul de dilatare volumică γ_2. Dacă întreg sistemul se încălzeşte cu t grade, procentul de scufundare a corpului în lichid va fi:

(Teste, Medicină Iaşi , pag.137 /1999)

Rezolvare:



$$F_A = F_A' \rightarrow m_l g = m_l' g \rightarrow m_l = m_l' \rightarrow V_l \rho_{0l} = K' V_l' \rho_l \rightarrow$$

$$\rightarrow K V_0 \rho_{0l} = K' V_0 (1+\gamma_1 t) \frac{\rho_0 l}{1+\gamma_2 t} \rightarrow K = K' \frac{1+\gamma_1 t}{1+\gamma_2 t} \rightarrow K' = \frac{K(1+\gamma_2 t)}{1+\gamma_1 t}$$

Procentul de scufundare a corpului în lichid este: $K' = \frac{K(1+\gamma_2 t)}{1+\gamma_1 t}$.

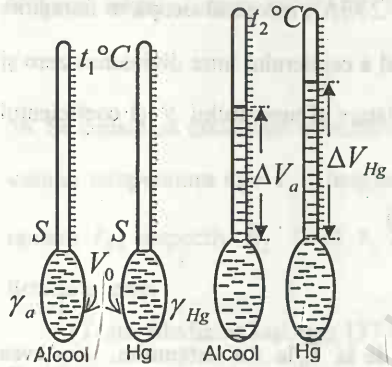
54. Se consideră două termometre din sticlă având secţiunile S ale tuburilor egale şi volumele V_0 ale rezervoarelor egale. Cele două termometre au drept corpuri termometrice alcoolul şi mercurul. Cunoscând coeficienţii de dilatare

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

pentru sticlă γ_s, pentru alcool γ_a şi pentru mercur γ_{Hg}, raportul între lungimile corespunzătoare unei variaţii Δt a temperaturii pe cele două scări termometrice este:

(Teste, Medicină Iaşi, pag.137/1999)

Rezolvare:



La încălzire cu Δt a termometrului cu alcool:

$V_s = V_0(1+\gamma_s \Delta t)$ şi

$V_a = V_0(1+\gamma_a \Delta t)$

Vom calcula :

$\Delta V_a = V_a - V_s =$

$= V_0(1+\gamma_a \Delta t) - V_0(1+\gamma_s \Delta t) =$

$= V_0(1+\gamma_a \Delta t - 1 - \gamma_s \Delta t) = V_0(\gamma_a - \gamma_s)\Delta t \rightarrow \Delta V_a = V_0(\gamma_a - \gamma_s)\Delta t.$

La încălzirea cu Δt a termometrului cu Hg: $V_s = V_0(1+\gamma_s \Delta t)$ şi

$V_{Hg} = V_0(1+\gamma_{Hg} \Delta t)$. Vom calcula:

$\Delta V_{Hg} = V_{Hg} - V_s = V_0(1+\gamma_{Hg} \Delta t) - V_0(1+\gamma_s \Delta t) = V_0(\gamma_{Hg} - \gamma_s)\Delta t \rightarrow$

$\rightarrow \Delta V_{Hg} = V_0(\gamma_{Hg} - \gamma_s)\Delta t$. Facem raportul $\frac{\Delta V_a}{\Delta V_{Hg}}$ şi avem:

$$\frac{\Delta V_a}{\Delta V_{Hg}} = \frac{V_0(\gamma_a - \gamma_s)\Delta t}{V_0(\gamma_{Hg} - \gamma_s)\Delta t} = \frac{\gamma_a - \gamma_s}{\gamma_{Hg} - \gamma_s}.$$ Cum $\Delta V_a = S\Delta l_a$ iar

$\Delta V_{Hg} = S\Delta l_{Hg}$, atunci vom avea : $\frac{S\Delta l_a}{S\Delta l_{Hg}} = \frac{\gamma_a - \gamma_s}{\gamma_{Hg} - \gamma_s} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\Delta l_a}{\Delta l_{Hg}} = \frac{\gamma_a - \gamma_s}{\gamma_{Hg} - \gamma_s}.$$

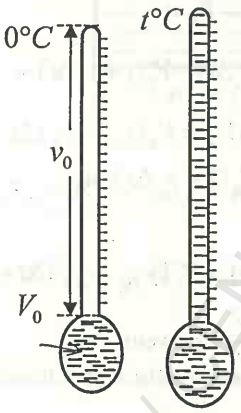
BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Raportul lungimilor corespunzătoare unei variaţii Δt a temperaturii pe cele două scări termometrice este: $\frac{\Delta l_a}{\Delta l_{Hg}} = \frac{\gamma_a - \gamma_s}{\gamma_{Hg} - \gamma_s}$.

55. Să se afle volumul iniţial V_0 al rezervorului unui termometru cu mercur dacă se cunoaşte că la temperatura $T_0 = 273K$, mercurul ocupă în întregime rezervorul termometrului. Volumul iniţial a capilarului între diviziunea zero şi t este v_0. Se cunosc coeficientul de dilatare al mercurului γ şi coeficientul de dilatare al sticlei α.

(Teste, Medicină Iaşi pag.137 /1999)

Rezolvare:



La încălzirea de la T_0 la t a sistemului, vom avea pentru sticlă:

$V_{sticlă} = (V_0 + v_0)(1 + \gamma_s \Delta t^0)$ unde

$\Delta t = t^0 - 0^0 C = t^0$, încât

$V_{sticlă} = (V_0 + v_0)(1 + \gamma_s t^0)$

Pentru Hg: $V_{Hg} = V_0(1 + \gamma_{Hg} t^0)$

Cum $V_{sticlă} = V_{Hg}$ vom avea:

$$(V_0 + v_0)(1 + \gamma_s t^0) = V_0(1 + \gamma_{Hg} t^0) \rightarrow$$

$$\rightarrow V_0(1 + \gamma_s t^0) + v_0(1 + \gamma_s t^0) = V_0(1 + \gamma_{Hg} t^0) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_0(1 + \gamma_s t^0) = V_0(1 + \gamma_{Hg} t^0) - V_0(1 + \gamma_s t^0) \rightarrow$$

$$\rightarrow v_0(1 + \gamma_s t^0) = V_0(1 + \gamma_{Hg} t^0 - 1 - \gamma_s t^0) \rightarrow$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow v_0(1+\gamma_s t^0) = V_0(\gamma_{Hg} - \gamma_s)t^0 \rightarrow \quad V_0 = \frac{v_0(1+\gamma_s t^0)}{(\gamma_{Hg} - \gamma_s)t^0}$$

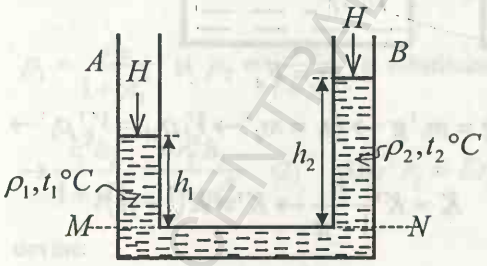
unde $\gamma_s = 3\alpha$ iar $V_0 = \frac{v_0(1+3\alpha t^0)}{(\gamma_{Hg} - 3\alpha)t^0}$.

Volumul inițial al rezervorului este: $V_0 = \frac{v_0(1+3\alpha t^0)}{(\gamma_{Hg} - 3\alpha)t^0}$.

56. Se consideră două vase comunicante umplute cu un lichid, într-o ramură a vasului temperatura este t_1 și lungimea coloanei de lichid h_1, iar în cealaltă ramură t_2, respectiv h_2. Dacă $t_2 > t_1$, coeficientul de dilatare volumică a lichidului este:

(Teste, Medicină Iași, pag 137 /1999)

Rezolvare:



La nivelul MN putem scrie:

$$p_1 = p_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow H + \rho_1 g h_1 = H + \rho_2 g h_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \quad (1).$$

Cum $\rho_1 = \frac{\rho_0}{1+\gamma t_1}$ și

$\rho_2 = \frac{\rho_0}{1+\gamma t_2}$ și substituind în relația (1) : $\frac{\rho_0}{1+\gamma t_1} h_1 = \frac{\rho_0}{1+\gamma t_2} h_2 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{h_1}{1+\gamma t_1} = \frac{h_2}{1+\gamma t_2} \rightarrow h_1 + h_1 \gamma t_2 = h_2 + h_1 \gamma t_1 \rightarrow \gamma(h_1 t_2 - h_1 t_1) = h_2 - h_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \gamma = \frac{h_2 - h_1}{h_1 t_2 - h_1 t_1}.$$

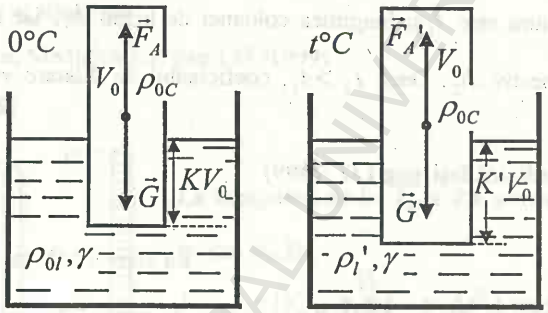
BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Coeficientul de dilatare volumică a lichidului este : $\gamma = \dfrac{h_2 - h_1}{h_1 t_2 - h_1 t_1}$.

57. Se consideră un solid, care la $0^0 C$ se confundă un procent K din volumul său, într-un lichid având coeficientul de dilatare γ. Dacă lichidul este adus la temperatura t, procentul de scufundare a corpului este :

(Teste, Medicină Iaşi, pag.137 /1999)

Rezolvare:



$$F_A = F_A' \rightarrow G_l = G_l' \rightarrow m_l g = m_l' g \rightarrow m_l = m_l' \rightarrow V_l \rho_{0l} = V_l' \rho_l' \rightarrow$$

$$\rightarrow KV_0 \rho_{0l} = K' V_0 \frac{\rho_{0l}}{1+\gamma t} \rightarrow \quad K = K' \frac{1}{1+\gamma t} \rightarrow K' = K(1+\gamma t).$$

Procentul de scufundare a corpului este: $K' = K(1+\gamma t)$.

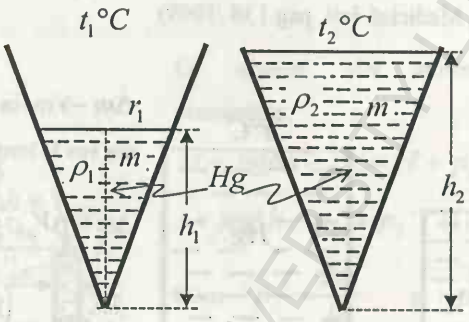
58. Într-un vas de sticlă, de formă conică, cu vârful în jos, se află o cantitate de mercur la temperatura t_1. La ce temperatură t_2 trebuie încălzit sistemul pentru ca rază cercului suprafeţei libere a mercurului precum şi înălţimea coloanei de

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

mercur din vas să crească de K ori în raport cu valorile respective corespunzătoare temperaturii inițiale?

(Teste, Medicină Iași, pag.138/ 1999)

Rezolvare:



Masa de lichid din vasul de sticlă sub formă de con la t_1^0 : $m = V_1\rho_1$ și la t_2^0 :

$m = V_2\rho_2 \rightarrow V_1\rho_1 = V_2\rho_2$ (1). Cum $V_1 = \frac{\pi r_1^2 h_1}{3}$, $V_2 = \frac{\pi r_2^2 h_2}{3}$,

$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1+\gamma t_1^0}$ și $\rho_2 = \frac{\rho_0}{1+\gamma t_2^0}$ și substituind în (1) obținem:

$\rightarrow \frac{r_1^2 h_1}{1+\gamma t_1^0} = \frac{r_2^2 h_2}{1+\gamma t_2^0}$ (2) Dar $r_2 = Kr_1$ și $h_2 = Kh_1$ încât relația (2) devine:

$$\rightarrow \frac{r_1^2 h_1}{1+\gamma t_1^0} = \frac{K^2 r_1^2 K h_1}{1+\gamma t_2^0} \rightarrow \frac{1}{1+\gamma t_1^0} = \frac{K^3}{1+\gamma t_2^0} \rightarrow 1+\gamma t_2^0 = K^3\left(1+\gamma t_1^0\right) \rightarrow$$

$$\gamma t_2^0 = K^3\left(1+\gamma t_1^0\right) - 1 \rightarrow \qquad t_2^0 = \frac{K^3\left(1+\gamma t_1^0\right)-1}{\gamma}.$$

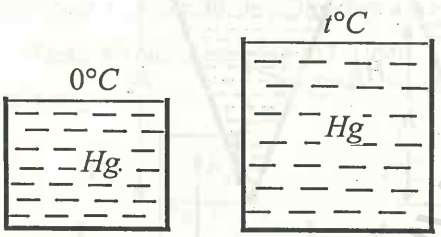
Temperatura la care trebuie încălzit sistemul este: $t_2^0 = \frac{K^3\left(1+\gamma t_1^0\right)-1}{\gamma}$.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

59. La zero grade Celsius, un vas de sticlă umplut complet cu mercur conține o masă m de mercur. Fiind încălzit la temperatura t curge din el o masă Δm de mercur. Coeficientul de dilatare γ_1 pentru mercur și γ_2 pentru sticla, temperatura t se calculează cu relația:

(Teste, Medicină Iași, pag.138 /1999)

Rezolvare:



$\Delta m \rightarrow$ masa aparentă ce curge din vas la temperatura t.

$$\Delta m = \Delta V_a \rho = \Delta V_a \frac{\rho_0}{1+\gamma_1 t^0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta V_a = \frac{(1+\gamma_1 t^0)\Delta m}{\rho_0}$$

Dar $\gamma_a = \frac{\Delta V_a}{V_0 t^0}$, încât înlocuind ΔV_a în γ_a obținem:

$$\gamma_a = \frac{1}{V_0 t^0} \frac{(1+\gamma_1 t^0)\Delta m}{\rho_0}$$ Însă, $V_0 \rho_0 = m$ și atunci $\gamma_a = \frac{(1+\gamma_1 t^0)\Delta m}{m t^0}$

Între γ_1, γ_2 și γ_a există relația: $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_a \rightarrow \gamma_1 - \gamma_2 = \frac{(1+\gamma_1 t^0)\Delta m}{mt} \rightarrow$

$$\rightarrow (\gamma_1 - \gamma_2) m t^0 = \Delta m + \gamma_1 t^0 \Delta m \rightarrow$$

$$\rightarrow (\gamma_1 - \gamma_2) m t^0 - \gamma_1 t^0 \Delta m = \Delta m \rightarrow$$

$$\rightarrow t^0 [(\gamma_1 - \gamma_2) m - \gamma_1 \Delta m] = \Delta m \rightarrow t^0 = \frac{\Delta m}{(\gamma_1 - \gamma_2) m - \gamma_1 \Delta m}.$$

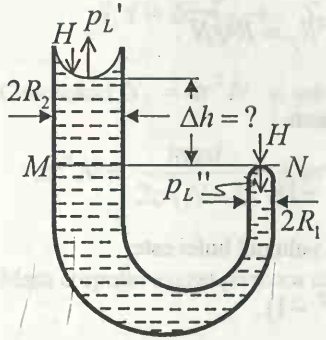
Temperatura la care trebuie încălzit sistemul este: $t^0 = \frac{\Delta m}{(\gamma_1 - \gamma_2) m - \gamma_1 \Delta m}$.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

60. Se consideră un tub capilar de forma literei U , cu raze diferite, în care se toarnă un lichid care udă complet pereţii tubului. Pentru ce denivelare Δh meniscul inferior va fi convex, având raza egală cu raza R_1 a tubului?

(Teste, Medicină Iaşi, pag.138 /1999)

Rezolvare:



La nivelul MN scriem echilibrul presiunilor:

$$H + \rho g \Delta h - p_L' = H + p_L'' \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho g \Delta h - p_L' = p_L'' \quad (1)$$

Cum $p_L' = \frac{2\sigma}{R_2}$ şi $p_L'' = \frac{2\sigma}{R_1}$ şi substituim în relaţia (1) obţinem :

$$\rightarrow \rho g \Delta h - \frac{2\sigma}{R_2} = \frac{2\sigma}{R_1} \rightarrow \rho g \Delta h = \frac{2\sigma}{R_2} + \frac{2\sigma}{R_1} \rightarrow \rho g \Delta h = 2\sigma\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \rightarrow$$

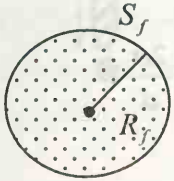
$$\rightarrow \Delta h = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right).$$

Denivelarea Δh are relaţia: $\Delta h = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$.

61. Lucrul mecanic efectuat pentru a mări de N ori volumul unei bule de săpun de rază R şi coeficientul de tensiune superficială σ , este:

(Teste, Medicină Iaşi, pag.138/ 1999)

Rezolvare:



BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Bula de săpun are 2 fețe și atunci lucrul mecanic pentru a mări de N ori volumul unei bule este: $L = -2\sigma\Delta S$. Vom calcula modulul lucrului mecanic efectuat: $|L| = 2\sigma\Delta S = 2\sigma(S_f - S) = 2\sigma(4\pi R_f^2 - 4\pi R^2) =$

$= 8\pi\sigma(R_f^2 - R^2)$. Între volumul final al bulei și cel inițial este relația: $V_f = NV_i \rightarrow \frac{4\pi R_f^2}{3} = N\frac{4\pi R^2}{3} \rightarrow R_f = R\sqrt[3]{N}$.

Dar $R_f^2 = R^2\sqrt[3]{N^2}$ și substituind în $|L|$ obținem :

$|L| = 8\pi\sigma(R^2\sqrt[3]{N^2} - R^2) = 8\pi\sigma R^2(\sqrt[3]{N^2} - 1)$.

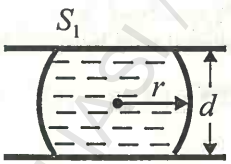
Lucrul mecanic efectuat pentru a mări de N ori volumul bulei este:

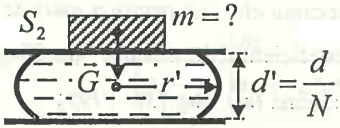
$$|L| = 8\pi\sigma R^2(\sqrt[3]{N^2} - 1).$$

60. Între două plăci de sticlă orizontale se află mercur sub forma unui disc de rază r și grosime d. Cunoscând coeficientul de tensiune superficială a mercurului σ și accelerația gravitațională, masa m a unui corp care trebuie pus pe placa superioară pentru a micșora de N ori distanța dintre plăci este:

(Test, Medicină Iași, pag.138/ 1999)

Rezolvare:





$$p_1 = \frac{2\sigma}{d} \qquad p_2 = \frac{2\sigma}{d'} = \frac{2\sigma N}{d}$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum $p_2 > p_1 \rightarrow p_2 - p_1 = \frac{mg}{S_2} \rightarrow \frac{2\sigma N}{d} - \frac{2\sigma}{d} = \frac{mg}{S_2} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{2\sigma}{d}(N-1) = \frac{mg}{S_2} \rightarrow S_2 = \frac{mgd}{2\sigma(N-1)} \quad (1).$$

Conservarea volumului de mercur dintre plăcile orizontale :

$$S_1 d = S_2 \frac{d}{N} \rightarrow \quad S_2 = NS_1 = \pi r^2 N .$$

Cunoscând $S_2 = \pi r^2 N$ şi substituind în (1) obţinem:

$$\pi r^2 N = \frac{mgd}{2\sigma(N-1)} \rightarrow m = \frac{2\pi\sigma r^2 N(N-1)}{gd}.$$

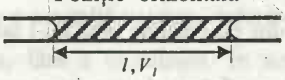
Masa corpului aşezat pe placa superioară este : $m = \frac{2\pi\sigma r^2 N(N-1)}{gd}$.

63. Într-un capilar orizontal de diametru interior 1,5mm se află o coloană de apă cu lungime $l = 11cm$. Cunoscând $\sigma_{apă} = 75 \bullet 10^3 \, N/m$, $\rho_{apă} = 10^3 \, kg/m^3$ şi $g = 10 \, m/s^2$, se cere numărul de picături de apă care se desprind din tub când acesta este plasat în poziţie verticală.

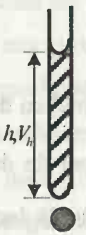
(Teste , Medicină Iaşi, pag 138 /1999)

Rezolvare:

Poziţie orizontală



Poziţie verticală



BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Numărul de picături ce se vor desprinde: $n = \frac{V_l - V_h}{V_p}$ (1), unde

$$V_l = Sl = \frac{\pi d^2}{4} l \text{ şi } \quad V_h = \frac{\pi d^2}{4} h.$$

La desprinderea unei picături de apă: $m_p g = \sigma \pi d \rightarrow V_p \rho g = \sigma \pi d \rightarrow$

$$\rightarrow V_p = \frac{\sigma \pi d}{\rho g}.$$

Substituind V_l, V_h şi V_p în relaţia (1) obţinem: $n = \frac{\frac{\pi d^2}{4} l - \frac{\pi d^2}{4} h}{\frac{\sigma \pi d}{\rho g}} =$

$$= \frac{\frac{\pi d^2}{4}(l-h)}{\frac{\sigma \pi d}{\rho g}} = \frac{d(l-h)\rho g}{4\sigma}, \text{ unde } h = \frac{4\sigma}{\rho g d}. \text{ Înlocuind } h = \frac{4\sigma}{\rho g d} \text{ în}$$

relaţia lui n, obţinem: $n = \frac{d(l - \frac{4\sigma}{\rho g d})\rho g}{4\sigma} = \frac{dl\rho g - 4\sigma}{4\sigma} = \frac{dl\rho g}{4\sigma} - 1$

Numărul de picături se calculează cu relaţia : $n = \frac{dl\rho g}{4\sigma} - 1$.

Numeric: $n = \frac{10^3 \bullet 10 \bullet 1{,}5 \bullet 10^{-3} \bullet 11 \bullet 10^{-2}}{4 \bullet 75 \bullet 10^{-3}} - 1 \cong 4$ picături

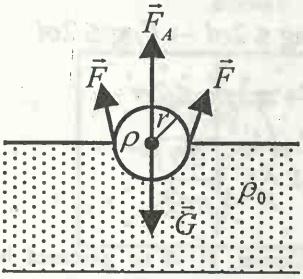
Se vor scurge din tubul capilar aşezat vertical $n \cong 4$ picături

64. Un ac de oţel cu densitatea ρ, uns cu grăsime (apa nu-l udă), se aşează pe suprafaţa apei de densitate ρ_0 şi coeficient de tensiune superficială σ. Acul nu se scufundă dacă raza secţiunii sale satisface condiţia:

(Test, Medicină Iaşi , pag.139 /1999)

BCU IAŞI / CONTRA UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:



Varianta I

Pentru ca acul de oţel să nu se scufunde, trebuie îndeplinită condiţia: $G \le 2F + F_A \rightarrow$

$$\rightarrow mg \le 2\sigma l + m_l g \rightarrow$$

$$\rightarrow V\rho g \le 2\sigma l + V_l \rho_0 g \rightarrow$$

$$\rightarrow V\rho g \le 2\sigma l + \frac{V}{2}\rho_0 g \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi r^2 \rho g \le 2\sigma + \frac{\pi r^2}{2}\rho_0 g \rightarrow \quad 2\pi r^2 \rho g \le 4\sigma + \pi r^2 \rho_0 g \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\pi r^2 \rho g - \pi r^2 \rho_0 g \le 4\sigma + \pi r^2 \rho_0 g \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi r^2 g(2\rho - \rho_0) \le 4\sigma \rightarrow \quad r^2 \le \frac{4\sigma}{\pi g(2\rho - \rho_0)} \rightarrow$$

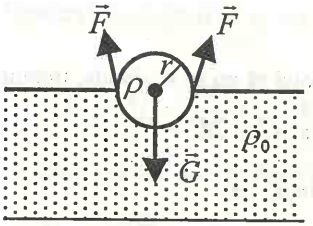
$$\rightarrow r \le \sqrt{\frac{4\sigma}{\pi g(2\rho - \rho_0)}} \rightarrow \qquad r \le 2\sqrt{\frac{\sigma}{\pi g(2\rho - \rho_0)}}.$$

Condiţia ca acul uns să nu se scufunde este: $r \le 2\sqrt{\frac{\sigma}{\pi g(2\rho - \rho_0)}}$.

Acest rezultat a fost adus de la Iaşi, de un candidat ce lua lecţii în particular şi care după mine se pretează la unele discuţii, deoarece pentru a se ajunge la acest rezultat s-a presupus că acul intră în lichid jumătate din volumul său, iar în textul problemei nu menţionează aşa ceva. Un ac uns şi dacă greutatea lui nu depăşeşte o anumită valoare, deformează stratul superficial şi poate pluti la suprafaţa lui, fără a se afunda. În acest caz, forţa arhimedică este nulă , rămânând la echilibru : greutatea acului şi cele două forţe de tensiune superficială ce acţionează deoparte şi de alta de-a lungul acului. Rezolvând problema în condiţiile acestea , se obţine o altă relaţie pentru r .

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Varianta II



Scriem condiția de echilibru al forțelor:

$$\rightarrow G \le 2F \rightarrow mg \le 2\sigma l \rightarrow V\rho g \le 2\sigma l$$

$$\rightarrow Sl\rho g \le 2\sigma l \rightarrow \pi r^2 \rho g \le 2\sigma \rightarrow$$

$$\rightarrow r^2 \le \frac{2\sigma}{\pi\rho g} \rightarrow \quad r \le \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi\rho g}}$$

Condiția ca acul uns să nu intre în restul lichidului, ci să se găsească la suprafața lichidului este: $r \le \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi\rho g}}$.

Prin *varianta I* : s-a găsit rezultatul: $r \le 2\sqrt{\frac{\sigma}{\pi g(2\rho - \rho_0)}}$ și prin *varianta II:* $r \le \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi\rho g}}$, rezultat cu totul diferit și las la aprecierea cititorului să decidă care din cele două rezultate pentru r este just căci personal sunt de acord cu *varianta II.*

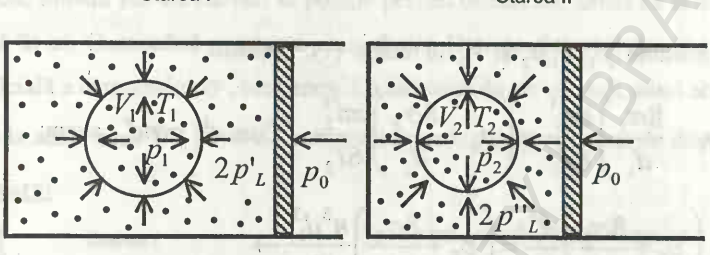
65. Într-un corp de pompă se află o bulă de săpun de diametru d_1. Inițial, temperatura aerului din corpul pompei este t_1, iar presiunea p_0. Efectuând o transformare izobară, gazul din cilindru se răcește până la temperatura t_2, condiții în care diametrul bulei de săpun devine $d_2 = nd_1$.

Cunoscând coeficientul de tensiune superficială σ_1 a apei de săpun la temperatura inițială, valoarea σ_2 acestuia la t_2 este:

(Test, Medicină Iași, pag.139 /1999)

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:



La introducerea pistonului în cilindru, gazele din bula de săpun, suferă o transpunere generală din starea I în starea II, ceea ce şi putem scrie:

$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}$ (1) unde $p_1, V_1 p_2$ şi V_2 trebuiesc calculaţi în stările I şi II.

La T_1: $p_1 = p_0 + 2p_L' \rightarrow$ S-a luat cifra 2 în faţa lui p_L' deoarece bula de săpun are două feţe.

$$V_1 = \frac{4\pi}{3}R_1^3 = \frac{4\pi}{3}\frac{d_1^3}{8} = \frac{\pi d_1^3}{6} \rightarrow V_1 = \frac{\pi d_1^3}{6}$$

$p_L' = \frac{2\sigma_1}{R_1} = \frac{4\sigma_1}{d_1} \rightarrow p_L'' = \frac{4\sigma_2}{d_2} \rightarrow V_2 = \frac{\pi d_2^3}{6}$. Pentru T_1 avem:

$$p_1 = p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1} \quad iar \quad V_1 = \frac{\pi d_1^3}{6}$$

La T_2: $p_2 = p_0 + 2p_L''$. S-a luat cifra 2 în faţa lui p_L'' deoarece bula de săpun are două feţe.

$$V_2 = \frac{4\pi}{3}R_2^3 = \frac{4\pi}{3}\frac{d_2^3}{8} = \frac{\pi d_2^3}{6} \rightarrow V_2 = \frac{\pi d_2^3}{6}$$

$p_L'' = \frac{2\sigma_2}{R_2} = \frac{4\sigma_2}{d_2} \rightarrow p_L'' = \frac{4\sigma_2}{d_2}$. Pentru T_2 avem:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$p_2 = p_0 + \frac{8\sigma_2}{d_2}$ şi $V_2 = \frac{\pi d_2^3}{6}$.

Substituind $p_1, V_1 p_2$ şi V_2 în relaţia (1), obţinem:

$\left(p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}\right)\frac{\pi d_1^3}{6T_1} = \left(p_0 + \frac{8\sigma_2}{d_2}\right)\frac{\pi d_2^3}{6T_2}$. Cum $d_2 = nd_1$, avem:

$$\rightarrow \left(p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}\right)\frac{d_1^3}{T_1} = \left(p_0 + \frac{8\sigma_2}{d_2}\right)\frac{n^3 d_1^3}{T_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}\right)\frac{1}{T_1} = \frac{p_0 n^3}{T_2} + \frac{8\sigma_2}{d_2}\frac{n^3}{T_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}\right)\frac{1}{T_1} = \frac{p_0 n^3}{T_2} + \frac{8\sigma_2}{nd_1}\frac{n^3}{T_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}\right)\frac{1}{T_1} = \frac{p_0 n^3}{T_2} + \frac{8\sigma_2}{d_1}\frac{n^2}{T_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}\right)\frac{1}{T_1} = \frac{p_0 n^3}{T_2} + \frac{8\sigma_2}{d_1}\frac{n^2}{T_2} \quad \Big| \cdot \frac{d_1 T_2}{8n^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d_1 T_2}{8n^2}\left(p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}\right)\frac{1}{T_1} - \frac{p_0 n^3}{T_2}\frac{d_1 T_2}{8n^2} = \sigma_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d_1 T_2}{8n^2}\left(p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}\right)\frac{1}{T_1} - \frac{d_1 p_0 n}{8} = \sigma_2 \rightarrow$$

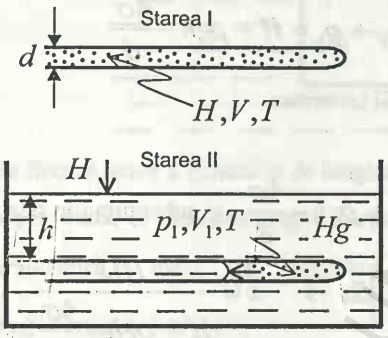
$\rightarrow \frac{d_1}{8}\left[\frac{T_2}{n^2}\left(p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}\right)\frac{1}{T_1} - p_0 n\right] = \sigma_2 \rightarrow$ Valoarea σ_2 la T_2 este:

$$\sigma_2 = \frac{d_1}{8}\left[\frac{T_2}{n^2}\left(p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}\right)\frac{1}{T_1} - p_0 n\right].$$

BCU ŞTIINŢIFICĂ CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

64. Un tub capilar de sticlă, de diametru interior d şi lungimea L, se introduce într-un vas cu mercur, în poziţie perfect orizontală, astfel ca aerul să rămână în el. Cunoscând presiunea atmosferică H şi coeficientul de tensiune superficială a mercurului σ, lungimea x a coloanei de aer din tub, când acesta se află la adâncimea h $(h >> d)$ sub nivelul mercurului, va fi dată de relaţia:

Rezolvare:



1) Cazul când tubul capilar este închis la un capăt şi deschis la celălalt.

Din starea I în starea II aerul suferă o transformare izotermă:

$$HV = p_1V_1 \quad (1)$$

După ce a pătruns mercurul în capilar aflat la adâncimea h, se stabileşte un echilibru între presiuni:

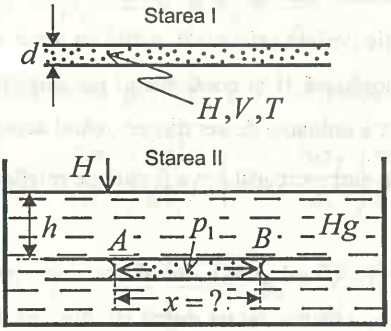
$$H + \rho gh = p_L + p_1 \rightarrow p_1 = H + \rho gh - p_L$$

unde $p_L = \frac{4\sigma}{d}$, încât $p_1 = H + \rho gh - \frac{4\sigma}{d}$.

Volumul de aer din starea I: $V = SL$ şi volumul de aer din starea II, comprimat în capilar este $V_1 = Sx$. Substituind p_1, V şi V_1 în relaţia (1) obţinem: $HSL = \left(H + \rho gh - \frac{4\sigma}{d}\right)Sx \rightarrow \qquad x = \frac{HL}{H + \rho gh - \frac{4\sigma}{d}}$.

Lungimea coloanei de aer din capilar, atunci când aceasta se află la adâncimea h faţă de nivelul mercurului din vas este: $x = \frac{HL}{H + \rho gh - \frac{4\sigma}{d}}$.

BCUJAS / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



2) Cazul când tubul capilar este deschis la ambele capete.

La echilibrul presiunilor pentru punctul A:

$$H + \rho gh = p_1 + p_L \rightarrow$$

$$\rightarrow p_1 = H + \rho gh - p_L =$$

$$\rightarrow p_1 = H + \rho gh - \frac{4\sigma}{d}$$

Scriem relaţia matematică a transformării izoterme:

$$HV = p_1 V_1 \quad (1)$$

Cum $V = SL$, $V_1 = Sx$ şi $p_1 = H + \rho gh - \frac{4\sigma}{d}$ şi substituind în relaţia (1) obţinem: $HSL = \left(H + \rho gh - \frac{4\sigma}{d} \right) Sx \rightarrow \quad x = \frac{HL}{H + \rho gh - \frac{4\sigma}{d}}$.

Lungimea coloanei de aer din capilar, atunci când aceasta se află la adâncimea h faţă de nivelul mercurului din vas este: $x = \frac{HL}{H + \rho gh - \frac{4\sigma}{d}}$.

În ambele cazuri, fie când tubul capilar este închis la un capăt şi deschis la celălalt, fie că este deschis la ambele capete şi introdus la adâncimea h faţă de nivelul mercurului dintr-un vas, lungimea coloanei de aer din capilar este aceiaşi adică: $x = \frac{HL}{H + \rho gh - \frac{4\sigma}{d}}$

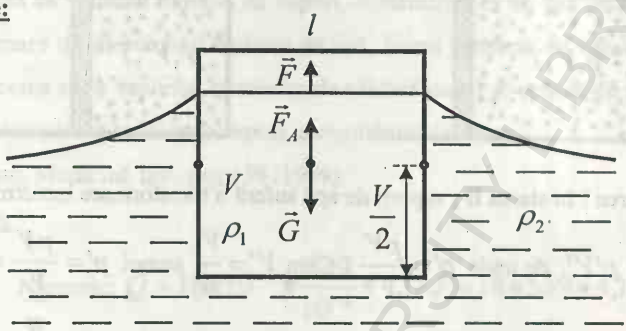
67. Un corp solid cu densitatea ρ_1, având forma de cub cu latura l, pluteşte într-un lichid cu densitatea ρ_2 şi coeficient de tensiune superficială σ. Ştiind că lichidul udă corpul solid, coeficientul de tensiune superficială pentru care

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

corpul este cufundat jumătate în lichid este dat de relaţia:

(Test, Medicină Iaşi, pag.126 /1997)

Rezolvare:



Pe fiecare latură a lichidului de lungime l, acţionează către o forţă de tensiune superficială, şi simultan asupra corpului acţionează şi greutatea, cât şi forţa arhimedică, încât la echilibru putem scrie: $G = F_A + 4F \rightarrow$

$mg = m_l g + 4\sigma l \rightarrow$

$$\rightarrow V\rho_1 g = \frac{V}{2}\rho_2 g + 4\sigma l \rightarrow \quad l^3\rho_1 g = \frac{l^3}{2}\rho_2 g + 4\sigma l \rightarrow$$

$$2l^2\rho_1 g = l^2\rho_2 g + 8\sigma \rightarrow \quad l^2 g(2\rho_1 - \rho_2) = 8\sigma \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{l^2 g(2\rho_1 - \rho_2)}{8}.$$

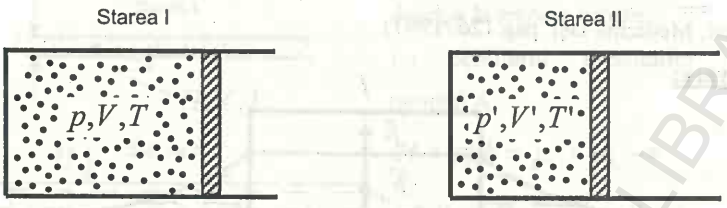
Coeficientul de tensiune superficială este dat de relaţia : $\sigma = \frac{l^2 g(2\rho_1 - \rho_2)}{8}$.

66. Un cilindru cu piston conţine vapori de apă la temperatură de $100^0 C$ şi presiunea $p = 270 torr$. Care va fi presiunea din cilindru dacă volumul este micşorat izoterm de $n = 4 ori$? De câte ori (n') trebuie micşorat izoterm volumul pentru ca vaporii să devină saturaţi?

(Teste, Medicină Iaşi, pag.139 /1999)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:



Din starea I în starea II , vaporii de apă suferă o transformare izotermă:

$pV = p'V'$ de unde $p' = \frac{pV}{V'}$. Cum $V' = \frac{V}{n}$ atunci $p' = \frac{pV}{\frac{V}{n}} = np$

Presiunea p' a crescut de n ori faţă de presiunea iniţială p.

Numeric: $p' = np = 4 \bullet 27 torr = 1080 torr$

Presiunea vaporilor de apă este: $V_s \cong 0{,}35V$

În tabelul presiunilor vaporilor saturaţi de apă în funcţie de temperatură, la temperatura de $100^0 C$, presiunea vaporilor saturaţi de apă este de $p_s = 760 torr$. Deci la $V' = \frac{V}{n} = \frac{V}{4}$, avem de-a face în interiorul cilindrului de vapori saturaţi şi putem scrie legea transformării izoterme pe a găsi de câte ori n' trebuie micşorat volum V pentru a avea starea de vapori de apă saturaţi:

$$p_1 V_1 = pV \rightarrow V_s = \frac{pV}{p_s} = \frac{270}{760} V \cong 0{,}35V \rightarrow V_s \cong 0{,}35V \rightarrow \frac{V_s}{V} = 0{,}35 = n'$$

Pentru ca vaporii de apă să devină la un moment vapori saturaţi, trebuie ca volumul V iniţial să fie micşorat în mod izoterm de $n' = 0{,}35 ori$ faţă de V.

Răspunsurile cerute în problemă sunt: $p_s = 760 torr$ şi $n' = 0{,}35 ori$.

69. Se consideră un mol de apă care trece în stare de vapori, la $t_f = 100^0 C$ şi presiunea atmosferică normală. Căldura latentă de vaporizare a apei este

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\lambda = 539 cal/g$, iar constanta universală a gazelor $R = 8{,}317 J/mol \bullet gram$

Presupunând că volumul molului de vapori –consideraţi ca un gaz perfect este mult mai mare decât volumul molului de apă, lucrul mecanic de vaporizare a apei la trecerea sa în vapori şi cantitatea de căldură care i se comunică molului de apă pentru a trece în stare de vapori are următoarele valori:

(Teste, Medicină Iaşi, pag.139 /1999)

Rezolvare:

$Q = m\lambda$ Numeric: $Q = 18 \bullet 10^{-3} \bullet \frac{539}{10^{-3}} \bullet 4{,}18J = 18 \bullet 539 \bullet 4{,}18J =$

$= 38464{,}36J = 38{,}4KJ$,

$L = \nu R\Delta T = \frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{m}{\mu} RT = \frac{18 \bullet 10^{-3}}{18} \bullet 8310 \bullet 373J =$

$= 2099{,}61J \cong 2{,}099KJ \cong 2KJ$.

Mărimile fizice cerute în problemă au valorile: $L \cong 2KJ$ şi $Q = 38{,}4KJ$

70. Într-un cilindru de secţiune S sub un piston de masă neglijabilă se află o masă m de apă la temperatura de solidificare. Cu ce înălţime se ridică pistonul dacă transmitem apei o cantitate de căldură Q astfel încât o parte din apă se transformă în vapori la temperatura de fierbere a apei T_f? (presiunea atmosferică este H). (Teste, Medicină Iaşi, pag.139/1999)

Rezolvare:

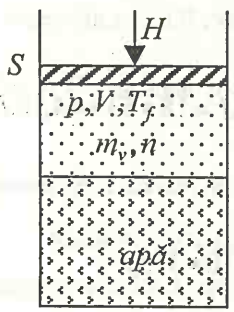
$Q = mc(T_f - T_0) + m_v\lambda_v + L$ unde $L = HSh$ încât:

$$m_v = \frac{Q - mc(T_f - T_0) - HSh}{\lambda_v}.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

m_v reprezintă cantitatea de vapori proveniți din cantitatea de masă m de apă, atunci i s-a transmis căldura Q. Această masă de vapori m_v va transmite o anumită presiune $p = H$, încât pistonul de masă neglijabilă se va ridica la o anumită înălțime h pe care trebuie s-o aflăm:

Scriem ecuația Clapeyron-Mendeleev



$$pV = \frac{m_v}{\mu} RT_f \rightarrow HSh = \frac{m_v}{\mu} RT_f \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{m_v RT_f}{\mu HS} \quad (1).$$

În relația (1) introducem $m_v = \frac{Q - mc(T_f - T_0) - HSh}{\lambda_v}$

și obținem: $h = \frac{RT_f[Q - mc(T_f - T_0)]}{HS[RT_f + \mu\lambda_V]}$

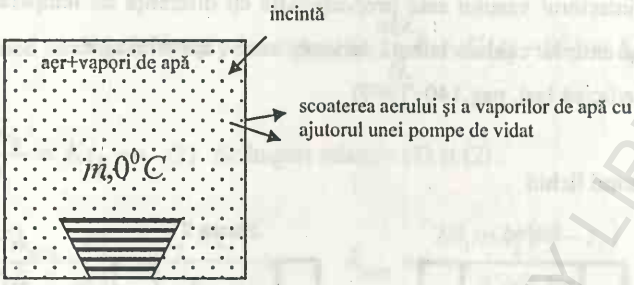
Înălțimea cu care se va ridica pistonul atunci când se transmite apei cantitatea de căldură Q este: $h = \frac{RT_f[Q - mc(T_f - T_0)]}{HS[RT_f + \mu\lambda_V]}$.

71. Prin evaporarea forțată, în vid, un lichid poate fi răcit atât de mult încât se solidifică. Cunoscând căldura latentă specifică a gheții (λ_v și respectiv λ_g) să se calculeze funcțiunea K din masa inițială de apă aflată la $0^0 C$, care poate fi înghețată prin acest procedeu. (Teste, Medicină Iași, pag.139/1999)

Rezolvare:

$Q_c = m_g\lambda_g$ iar $Q_p = m_v\lambda_v$. Cum $Q_c = Q_v \rightarrow$ $m_g\lambda_g = m_v\lambda_v$ (1)

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



Dar $m = m_g + m_v$ (2) şi substituind pe $m_v = \frac{m_g \lambda_g}{\lambda_v}$ din (1) în (2) se obţine: $m = m_g + \frac{m_g \lambda_g}{\lambda_v} = m_g\left(1 + \frac{\lambda_g}{\lambda_v}\right) = m_g \frac{\lambda_v + \lambda_g}{\lambda_v} \rightarrow$

$\rightarrow m = m_g \frac{\lambda_v + \lambda_g}{\lambda_v} \rightarrow \frac{\lambda_v}{\lambda_v + \lambda_g} = \frac{m_g}{m} = K \rightarrow \quad K = \frac{\lambda_v}{\lambda_v + \lambda_g}$ unde K reprezintă fracţiunea din masa iniţială a apei aflată la 0^0C ce poate fi transformată în gheaţă prin procedeul indicat.

72. Într-un vas termoizolant (Dewar) de volum $V = 2l$ se găseşte azot lichid la temperatura $t_1 = -195^0C$. În timp de $\theta_1 = 24ore$ se vaporizează jumătate din cantitatea iniţială de azot. În acelaşi vas într-un timp $\theta_2 = 22ore$ la temperatura ^0C, se topeşte o cantitate $m = 40\,g$ gheaţă.

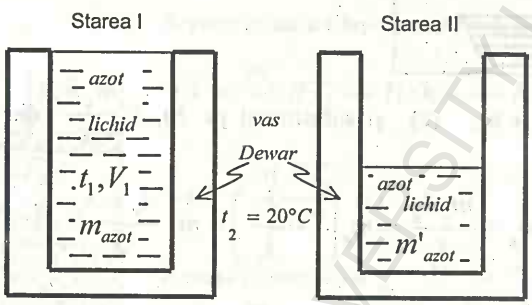
Temperatura mediului înconjurător este $t_2 = 20^0C$. Se cunoaşte densitatea azotului lichid $\rho = 8 \bullet 10^2 \, kg/m^3$ şi căldura latentă de topire a gheţii $\lambda_g = 3{,}3 \bullet 10^5 \, J/kg$. Presupunând că viteza cu care se produce schimbul de

căldură spre interiorul vasului este proporţională cu diferenţa de temperatură între interior şi exterior căldura latentă de vaporizare a azotului este:

(Teste, Medicină Iaşi, pag.140 /1999)

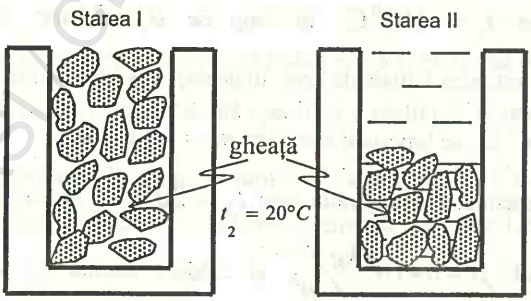
Rezolvare:

1) Pentru azotul lichid



Viteza cu care se reproduce schimbul de căldură spre interiorul vasului este proporţională cu diferenţa de temperatură între interior şi exterior şi putem scrie: $\frac{m'_{azot}\,\lambda_{azot}}{\theta_1} = K(t_2 - t_1)$ unde $m'_{azot} = \frac{m_{azot}}{2} = \frac{\rho V}{2}$, încât obţinem: $\frac{\rho V \lambda_{azot}}{2\theta_1} = K(t_2 - t_1)$ (1).

2) Pentru gheaţă:



BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În mod analog scriem şi pentru gheaţă: $\frac{m\lambda_g}{\theta_2} = K(t_2 - 0^0) = Kt_2 \rightarrow$

$\frac{m\lambda_g}{\theta_2} = Kt_2 \rightarrow$ (2) Se împart relaţiile (1) şi (2) :

$$\frac{\rho V\lambda_{azot}}{2\theta_1}\frac{\theta_2}{m\lambda_g} = \frac{t_2 - t_1}{t_2} \rightarrow \qquad \lambda_{azot} = \frac{2\theta_1 m\lambda_g (t_2 - t_1)}{V\rho\theta_2 t_2}.$$

Căldura latentă specifică a azotului se calculează cu relaţia:

$$\lambda_{azot} = \frac{2\theta_1 m\lambda_g (t_2 - t_1)}{V\rho\theta_2 t_2}.$$

Numeric se găseşte: $\lambda_{azot} = 1{,}935\ J/kg$

73. O masă m_1 de gheaţă, aflată la temperatura $t_1 < 0^0 C$ se transformă, prin încălzire, în vapori. Se cunosc căldurile specifice c_g şi c_a pentru gheaţă şi respectiv apă.

a) ştiind că valoarea căldurii totale necesară pentru transformarea cantităţii de gheaţă într-o cantitate egală de apă la $t_f = 100^0 C$ este Q_t, să se determine căldura Q_{top} necesară pentru topirea gheţii;

b) temperatura T atinsă în destinderea izobară a ν kmoli de vapori de apă (consideraţi drept gaz ideal) iar lucrul efectuat este L, temperatura iniţială fiind cea de vaporizare, este dată de relaţia :

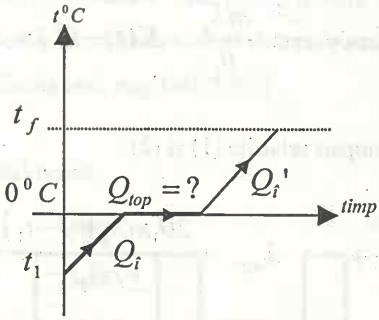
(Teste, Medicină Iaşi, pag.140 /1999)

Rezolvare:

Pentru rezolvarea problemei ne folosim de metoda grafică:

BCU "ŞTIINŢĂ" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a)



Din grafic se constată că $Q_t = Q_i + Q_{top} + Q_i'$ (1), unde:

$Q_i = m_1 c_g (0^0 - t_1) \quad \rightarrow Q_i = -m_1 c_g t_1$

$Q_i' = m_1 c_a (t_f - 0^0) = m_1 c_a t_f$.

Substituind Q_i şi Q_i' în relaţia (1) avem:

$Q_t = -m_1 c_g t_1 + Q_{top} + m_1 c_a t_f \rightarrow$

$\rightarrow Q_{top} = Q_t + m_1 c_g t_1 - m_1 c_a t_f = Q_t + m_1 (c_g t_1 - c_a t_f)$.

Căldura de topire se calculează cu relaţia : $Q_t + m_1 (c_g t_1 - c_a t_f) = Q_{top}$.

b) Pentru calcularea temperaturii T ne folosim de formula lucrului mecanic în transformarea izobară: $L = \nu R \Delta t = \nu R (t - t_f) \rightarrow t - t_f = \frac{L}{\nu R} \rightarrow$

$\rightarrow t = t_f + \frac{L}{\nu R}$ dar $T = T_0 + t \rightarrow t = T - T_0$ şi atunci:

$T - T_0 = t_f + \frac{L}{\nu R} \rightarrow T = T_0 + t_f + \frac{L}{\nu R}$. Temperatura cerută T se calculează cu relaţia : $T = T_0 + t_f + \frac{L}{\nu R}$ sau cum $T_f = T_0 + t_f \rightarrow$

BCUIAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$t_f = T_f - T_0$ şi făcând substituirea în : $T = T_0 + T_f - T_0 + \frac{L}{\nu R} \rightarrow$

$$T = T_f + \frac{L}{\nu R}.$$

Temperatura atinsă în timpul destinderii izobare poate fi calculată fie cu relaţia:

$t = t_f + \frac{L}{\nu R}$ unde t şi t_f sunt în ^0C sau cu relaţia $T = T_f + \frac{L}{\nu R}$, unde

T şi T_f sunt exprimate în K.

74. Prin reunirea a n corpuri (de mase m_i, călduri specifice c_i, temperaturi t_i, coeficienţi de dilatare γ_i şi densităţi ρ_i, i=1,2,3, ...,n) se formează un sistem fizic în care corpurile schimbă căldura între ele, ajungând la o stare de echilibru termic caracterizat prin temperatura θ. Să se afle:

a) expresia temperaturii de echilibru;
b) expresia variaţiei totale de volum a sistemului considerat, presupunând că acesta este izolat termic de exterior;
c) aceeaşi cerinţă ca la punctul b) dacă cele n corpuri sunt alcătuite din aceeaşi substanţă.

(Teste, Medicină Iaşi, pag.140 /1999)

Rezolvare:

a) Întrucât corpurile schimbă căldură numai între ele, sistemul fizic este izolat şi la echilibru termic putem scrie: $\sum_{i-1}^{n} m_i c_i (\theta - t_i) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i c_i \theta - \sum_{i=1}^{n} m_i c_i t_i = 0 \rightarrow \quad \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Expresia temperaturii de echilibru este: $\theta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i}$.

b) Variația totală a volumului sistemului fizic va fi: $\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$

Pentru a găsi expresia ΔV, trebuie calculat ΔV_i. Se pleacă de la definiția

$$\gamma_i = \frac{\Delta V_i}{V_{0i}(\theta - t_i)} \rightarrow \Delta V_i = \gamma_i V_{0i}(\theta - t_i).$$

Cum $V_{0i} = \dfrac{m_i}{\rho_{0i}}$ iar $\rho_i = \dfrac{\rho_{0i}}{1+\gamma_i t_i} \rightarrow \rho_{0i} = \rho_i(1+\gamma_i t_i)$ rezultă:

$V_{0i} = \dfrac{m_i}{\rho_i(1+\gamma_i t_i)}$. Substituind V_{0i} în $\Delta V_i = \gamma_i V_{0i}(\theta - t_i)$ obținem:

$\Delta V_i = \gamma_i \dfrac{m_i(\theta - t_i)}{\rho_i(1+\gamma_i t_i)}$. Știindu-l pe $\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$ și substituindu-l pe

$\Delta V_i = \gamma_i \dfrac{m_i(\theta - t_i)}{\rho_i(1+\gamma_i t_i)}$ găsim : $\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\gamma_i m_i(\theta - t_i)}{\rho_i(1+\gamma_i t_i)}$.

Expresia variației totale de volum a sistemului fizic este :

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i m_i(\theta - t_i)}{\rho_i(1+\gamma_i t_i)}.$$

c) Când corpurile din sistemul fizic sunt alcătuite din aceiași substanță adică $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots\ldots\ldots\gamma_i = \gamma$ atunci expresia variației totale de volum este:

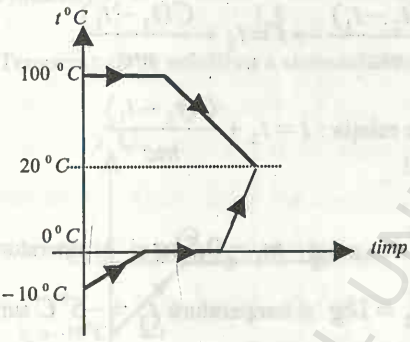
$$\Delta V = \gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\theta - t_i)}{\rho_i(1+\gamma t_i)}.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

75. Într-un calorimetru de masă neglijabilă se află o masă m_1 de gheață la temperatura T_1. Pentru a modifica temperatura din calorimetru cu 30^0C, se introduce o masă m_2 de vapori de apă la temperatura $373K$. Cunoscând c_g, c_a, λ_g și λ_v, masa de vapori se determină din relația:

(Teste, Medicină Iași, pag.140 /1999)

Rezolvare:



Corpuri calde: vapori de apă iar reci: gheața. Scriem ecuația calorimetrică:

$Q_c = Q_p$ (1), unde:

$$Q_c = m_2\lambda_v + m_2c_a\left[100^0 - 20^0\right] =$$
$$= m_2\lambda_v + 80m_2c_a =$$
$$= m_2(\lambda_v + 80c_a)$$

$$Q_p = m_1c_g\left[0^0 - (-10^0)\right] + m_1\lambda_g + m_1c_a\left[20^0 - 0^0\right] =$$
$$= 10m_1c_g + m_1\lambda_g + 20m_1c_a = m_1(10c_g + \lambda_g + 20c_a).$$

Substituim Q_c și Q_p în relația (1) și obținem:

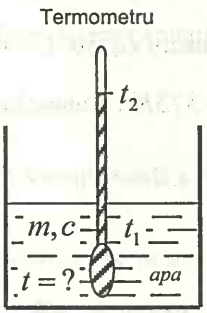
$$m_2(\lambda_v + 80c_a) = m_1(10c_g + \lambda_g + 20c_a) \rightarrow$$
$$\rightarrow m_2 = \frac{m_1(10c_g + \lambda_g + 20c_a)}{\lambda_v + 80c_a}.$$

76. Un termometru cufundat într-o cantitate de apă m își mărește temperatura de la t_1 la t_2. Cunoscând capacitatea C a termometrului și căldura specifică c a apei, temperatura inițială a apei este dată de relația:

(Teste, Medicină Iași, pag.141 /1999)

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:



Corpuri calde: apa din vas iar corpuri reci: termometrul

Aplicăm ecuația calorimetrică: $Q_c = Q_p$ (1), unde

$Q_c = mc(t - t_2)$ și $Q_p = C(t_2 - t_1)$

substituim pe Q_c și Q_p în relația (1) și obținem :

$mc(t - t_2) = C(t_2 - t_1) \rightarrow$

$$t - t_2 = \frac{C(t_2 - t_1)}{mc} \rightarrow t = t_2 + \frac{C(t_2 - t_1)}{mc}.$$

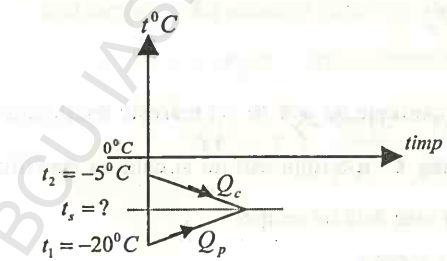
Temperatura inițială a apei este dată de relația : $t = t_2 + \frac{C(t_2 - t_1)}{mc}$.

77. Două bucăți de gheață, una de masă $m_1 = 0{,}5kg$ și temperatura $t_1 = -20^0 C$, iar cealaltă de masă $m_2 = 1kg$ și temperatură $t_2 = -5^0 C$ sunt puse în contact, sistemul astfel format izolându-se de mediu înconjurător.

După atingerea echilibrului termic, cele două bucăți de gheață se freacă între ele , până când se topește fracțiunea 10% din masa totală. Cunoscând căldura specifică c_g a gheții și căldura latentă de topire λ_g pentru gheață, lucrul mecanic conservat în timpul acestui proces este:

(Teste Medicină Iași, pag.141 /1999)

Rezolvare:



Aplicăm ecuația calorimetrică:

$Q_c = Q_p$ (1) unde

$Q_c = m_2 c_g (t_2 - t_s)$ și

$Q_p = m_1 c_g (t_s - t_1)$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Substituim pe Q_c şi Q_p în relaţia (1) şi obţinem:

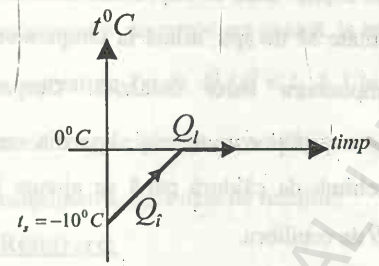
$$m_2c_g(t_2-t_s)=m_1c_g(t_s-t_1)\rightarrow m_2t_2+m_1t_1=t_s(m_2+m_1)\rightarrow$$

$$t_s=\frac{m_2t_2+m_1t_1}{m_2+m_1}$$

Temperatura de echilibru se calculează cu relaţia : $t_s=\frac{m_2t_2+m_1t_1}{m_2+m_1}$.

Numeric: $t_s=\frac{1\bullet(-5)+0{,}5\bullet(-20)}{1{,}5}=\frac{-5-10}{1{,}5}=\frac{-15}{1{,}5}=\frac{-150}{15}=-10^0C$.

Temperatura de echilibru a sistemului este: $t_s=-10^0C$.



Din grafic se vede: $Q=Q_i+Q_l=$

$=(m_1+m_2)c_g(0^0-t_s)+$

$+x(m_1+m_2)\lambda_g=$

$=(m_1+m_2)(x\lambda_g-c_gt_s)=$

$$=1{,}5\left[\frac{10}{100}\bullet 340000-2090(-10)\right]=1{,}5\bullet(34000+20900)=82{,}35Kg.$$

Căldura folosită pentru topirea celor două bucăţi de gheaţă este de: 82,35Kg şi provine din lucrul mecanic consumat în timpul procesului. Deci $L=Q=82{,}35Kg$. Lucrul mecanic consumat în timpul procesului de frecare este $L=82{,}35Kg$.

78. Unei bare de cupru cu secţiunea S şi lungimea l_0 la temperatură $t_0=0^0C$ îi este comunicată cantitatea de căldură Q. Să se calculeze temperatura θ la care ajunge o cantitate de apă cu masă M, în care este introdusă bara

BCUIASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

încălzită, dacă temperatura inițială a apei este θ_0. Se cunosc căldurile specifice c şi c_a pentru cuprul şi respectiv, apa, precum şi densitatea ρ a cuprului la temperatura $0^0 C$. (Teste, Medicină Iaşi, pag.141 /1991)

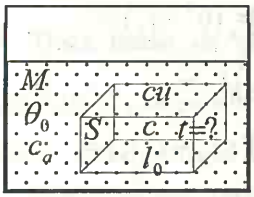
Rezolvare:

Trebuie determinat mai întâi temperatura t a barei din cupru, din relația :

$Q = m_{cu} c(t - t_0) = mct$ căci $t_0 = 0^0 C$. Cum

$m_{cu} = V\rho = Sl_0\rho$, vom scrie că $Q = Sl_0\rho ct \rightarrow t = \frac{Q}{Sl_0\rho c} \rightarrow$

temperatura la care a fost încălzită bara de cupru. Bara de cupru este introdusă într-o cantitate M de apă, aflată la temperatura $\theta_0 < t$ temperatura barei încălzită. Corpuri calde: bara de cupru şi corpuri reci: apa din vas. Are loc un schimb de căldură până se ajunge la temperatura θ de echilibru.



Scriem ecuația calorimetrică: $Q_c = Q_p$ (1) unde

$Q_c = m_{cu}c(t-\theta) = Sl_0\rho c(t-\theta)$ şi $Q_p = Mc_a(\theta-\theta_0)$.

Mărimile fizice Q_c şi Q_p le substituim în relația (1) şi obținem :

$Sl_0\rho c(t-\theta) = Mc_a(\theta-\theta_0) \rightarrow$

$Sl_0\rho ct - Sl_0\rho c\theta = Mc_a\theta - Mc_a\theta_0$ (2) Se substituie $t = \frac{Q}{Sl_0\rho c}$

în relația (2) şi avem: $Sl_0\rho c\frac{Q}{Sl_0\rho c} - Sl_0\rho c\theta = Mc_a\theta - Mc_a\theta_0 \rightarrow$

$\rightarrow Q - Sl_0\rho c\theta = Mc_a\theta - Mc_a\theta_0 \rightarrow$

$\rightarrow Q + Mc_a\theta_0 = \theta(Mc_a + Sl_0\rho c) \rightarrow$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

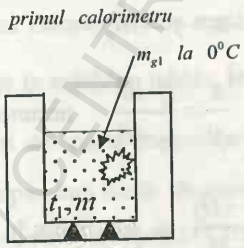
$$\theta = \frac{Q + Mc_a\theta_0}{Mc_a + Sl_0\rho c}.$$

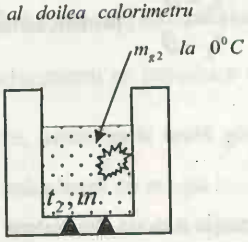
Temperatura θ la care ajunge cantitatea de apă M după introducerea barei de cupru încălzită la temperatura t se calculează cu relaţia:

$$\theta = \frac{Q + Mc_a\theta_0}{Mc_a + Sl_0\rho c}.$$

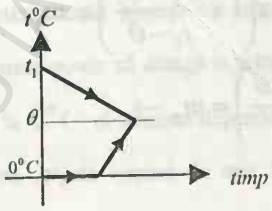
79. În două calorimetre identice se află aceeaşi cantitate de apă, dar la temperaturi diferite (t_1 şi respectiv $t_2 > t_1$). În fiecare din cele două calorimetre se introduce gheaţă, la temperatura 0^0C. Ştiind că pentru a atinge temperatura finală θ ($\theta < t_1, t_2$) în ambele calorimetre, se adaugă în total o masă m_g de gheaţă, cantităţile m_{g1} şi m_{g2} de gheaţă, introduse în fiecare calorimetru, sunt date de relaţiile: (Teste, Medicină iaşi, pag.141 /1999)

Rezolvare:

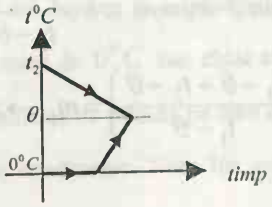




Graficul pentru primul calorimetru:



Graficul pentru al doilea calorimetru:



BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aplicăm la fiecare calorimetru în parte ecuația calorimetrică : $Q_c = Q_p$

Pentru primul calorimetru : $mc(t_1 - \theta) = m_{g1}\lambda + m_{g1}c\theta$ iar pentru al doilea calorimetru: $mc(t_2 - \theta) = m_{g2}\lambda + m_{g2}c\theta$

Relațiile dintre m_{g1}, m_{g2} și m_g este $m_{g1} + m_{g2} = m_g$

Facem următoarele notații: $m_{g1} = x$ și $m_{g2} = y$ și avem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} mc(t_1 - \theta) = x\lambda + xc\theta \\ mc(t_2 - \theta) = y\lambda + yc\theta \\ x + y = m_g \end{cases}$$

Din prima ecuație din sistem: $mc(t_1 - \theta) = x(\lambda + c\theta) \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{mc(t_1 - \theta)}{\lambda + c\theta}$ iar din a doua ecuație: $mc(t_2 - \theta) = y(\lambda + c\theta) \rightarrow$

$\rightarrow y = \dfrac{mc(t_2 - \theta)}{\lambda + c\theta}$. Fac raportul $\dfrac{x}{y} = \dfrac{mc(t_1 - \theta)}{\lambda + c\theta} \dfrac{\lambda + c\theta}{mc(t_2 - \theta)} = \dfrac{t_1 - \theta}{t_2 - \theta} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{t_1 - \theta}{t_2 - \theta}$. Formăm sistemul: $\begin{cases} x + y = m_g \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{t_1 - \theta}{t_2 - \theta} \end{cases}$ necunoscutele x și y.

Din ecuația a doua din sistem : $y = \dfrac{x(t_2 - \theta)}{t_1 - \theta}$ și substituim în prima ecuație din sistem și obținem: $x + \dfrac{x(t_2 - \theta)}{t_1 - \theta} = m_g \rightarrow x\left(1 + \dfrac{(t_2 - \theta)}{t_1 - \theta}\right) = m_g$

$\rightarrow x\left(\dfrac{t_1 - \theta + t_2 - \theta}{t_1 - \theta}\right) = m_g \rightarrow x\left(\dfrac{t_1 + t_2 - 2\theta}{t_1 - \theta}\right) = m_g \rightarrow$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow x(t_1+t_2-2\theta)=m_g(t_1-\theta)\rightarrow \quad x=\frac{m_g(t_1-\theta)}{t_1+t_2-2\theta}.$$

Cunoscând x putem afla pe y din relaţia $x+y=m_g$.

Din relaţia $x+y=m_g \rightarrow y=m_g-x=m_g-\frac{m_g(t_1-\theta)}{t_1+t_2-2\theta}=$

$$=m_g\left(1-\frac{(t_1-\theta)}{t_1+t_2-2\theta}\right)=m_g\left(\frac{t_1+t_2-2\theta-t_1+\theta}{t_1+t_2-2\theta}\right)=m_g\left(\frac{t_2-\theta}{t_1+t_2-2\theta}\right)=$$

$$\rightarrow y=\frac{m_g(t_2-\theta)}{t_1+t_2-2\theta}.$$

Cantităţile $m_{g1}=x$ şi $m_{g2}=x$ de gheaţă introduse în fiecare calorimetru sunt date de relaţiile: $x=m_{g1}=\frac{m_g(t_1-\theta)}{t_1+t_2-2\theta}$ şi $y=m_{g2}=\frac{m_g(t_2-\theta)}{t_1+t_2-2\theta}$.

80. Într-un vas calorimetric de masă m_1 se află o masă m_2 de apă şi o masă m_3 de gheaţă în echilibru tehnic. În apa din calorimetru se introduce o masă m_4 de vapori de apă la temperatura de fierbere, astfel încât toată gheaţa se topeşte . Temperatura totală din calorimetru se calculează cu relaţia :

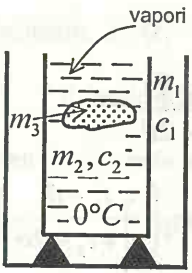
(Test, Medicină Iaşi , pag.141 /1999)

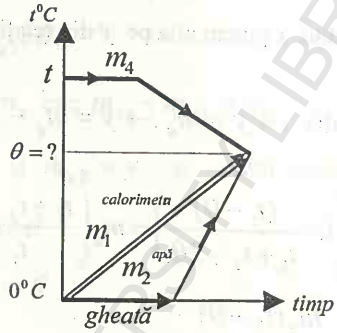
Rezolvare:

Întrucât toată gheaţa se topeşte rezultând din topirea ei o cantitate de apă, aceasta poate să atingă o temperatură mai mare de 0^0C sau chiar să rămână tot la 0^0C şi aceasta depinde numai de cantitatea de căldură pe care o cedează masa m_4 de vapori de apă în procesul de condensare. Vom lua cazul când

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sistemul ajunge la o temperatură $\theta > 0^0 C$ adică apa provenită din topirea completă a gheții își ridică temperatura de la $0^0 C$ la θ.





Corpurile calde: vaporii de apă de masă m_4, iar corpurile reci: gheața m_3, apa din calorimetru m_2, calorimetru m_1.

Aplicăm ecuația calorimetrului: $Q_c = Q_p$ (1), unde

$Q_c = m_4\lambda_v + m_4 c_2(t-\theta)$ și

$Q_p = m_3\lambda_g + m_3 c_2(\theta - 0^0) + m_2 c_2(\theta - 0^0) + m_1 c_1(\theta - 0^0)$ și

substituim Q_c și Q_p în relația (1) și obținând :

$$m_4\lambda_v + m_4 c_2(t-\theta) = m_3\lambda_g + m_3 c_2(\theta - 0^0) + m_2 c_2(\theta - 0^0) + m_1 c_1(\theta - 0^0)$$

$$m_4(\lambda_v + tc_2) - m_3\lambda_g = \theta c_2(m_3 + m_2 + m_1 + m_4) \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta = \frac{m_4(\lambda_v + tc_2) - m_3\lambda_g}{c_2(m_3 + m_2 + m_1 + m_4)}$$

Pentru ca $\theta > 0^0$, trebuie cu $m_4(\lambda_v + tc_2) > m_3\lambda_g$

În cazul când $m_4(\lambda_v + tc_2) - m_3\lambda_g = 0$, atunci $\theta = 0^0$ și în gheața care se topește toată, sistemul va avea temperatura de $0^0 C$. Pentru acest caz tot

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sistemul are temperatura de 0^0C, iar schimbul de căldură se face între vaporii de apă la 100^0C şi gheaţa la 0^0C.

81. Într-un calorimetru se adaugă succesiv, de trei ori aceeaşi cantitate mică de apă fierbinte. Ştiind că după prima adăugare temperatura în calorimetru a crescut cu Δt_1, iar după cea de-a doua adăugare a mai crescut cu Δt_2, după cea de-a treia adăugare temperatura în calorimetru va mai creşte cu:

(Teste, Medicină Iaşi, pag.141 /1999)

Rezolvare:

La prima adăugare de apă fierbinte: $\Delta t_1 = Km \rightarrow K = \frac{\Delta t_1}{m}$,

la a doua adăugare de apă fierbinte: $\Delta t_2 = K2m \rightarrow K = \frac{\Delta t_2}{2m}$ şi

la a treia adăugare de apă fierbinte: $\Delta t_3 = K3m \rightarrow K = \frac{\Delta t_3}{3m}$.

Rapoartele obţinute: $\frac{\Delta t_1}{m} = \frac{\Delta t_2}{2m} = \frac{\Delta t_3}{3m} = K$, de unde avem:

$\frac{\Delta t_1}{1} = \frac{\Delta t_2}{2} = \frac{\Delta t_3}{3}$. Am obţinut un şir de rapoarte egale şi ne permite să scriem: $\frac{\Delta t_1}{1} = \frac{\Delta t_2}{2} \rightarrow \Delta t_2 = 2\Delta t_1$,

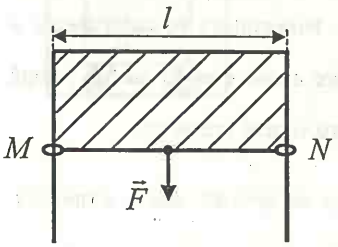
$\frac{\Delta t_1}{1} = \frac{\Delta t_3}{3} \rightarrow \Delta t_3 = 3\Delta t_1$ şi în fine,

$\frac{\Delta t_2}{2} = \frac{\Delta t_3}{3} \rightarrow \Delta t_3 = \frac{3\Delta t_2}{2} = \frac{3}{2} 2\Delta t = 3\Delta t_1$. Răspunsul este $\Delta t_3 = 3\Delta t_1$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

82. Pelicula de lichid în interiorul unui cadru aşezat vertical din sârmă este în echilibru datorită unei forţe F. Forma pe care o ia pelicula este de pătrat având latura l. Să se afle variaţia energiei peliculei când suprafaţa ei, prin deplasarea laturii mobile MN ajunge la valoarea S şi cu cât s-a deplasat această latură MN dacă coeficientul de tensiune superficială a lichidului este σ.

Rezolvare:



Variaţia energiei particulei:

$$\Delta E_p = 2\sigma\Delta S = 2\sigma(S_2 - S_1) = 2\sigma(S - l^2)$$

S-a luat coeficientul 2, deoarece pelicula de lichid are două feţe.

Dar $\sigma = \frac{F}{2l} \rightarrow l = \frac{F}{2\sigma}$ şi atunci

$$\Delta E_p = 2\sigma\left(S - \frac{F^2}{4\sigma^2}\right) = \frac{2\sigma\left(4\sigma^2 S - F^2\right)}{4\sigma^2} = \frac{4\sigma^2 S - F^2}{2\sigma}.$$ Cum

$$\Delta E_p = 2Fx \rightarrow x = \frac{\Delta E_p}{2F} = \frac{1}{2F}\frac{4\sigma^2 S - F^2}{2\sigma} = \frac{4\sigma^2 S - F^2}{4\sigma F}.$$ Relaţiile ΔE_p şi x sunt:

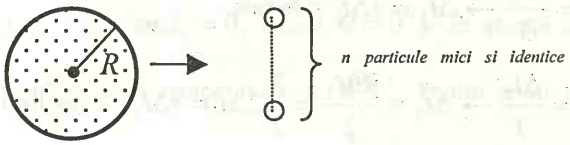
$$\Delta E_p = \frac{4\sigma^2 S - F^2}{2\sigma F} \text{ şi } x = \frac{4\sigma^2 S - F^2}{4\sigma F}.$$

83. se consideră o picătură mare de mercur, de rază R şi pentru a desface-o într-un număr de particule identice şi mici, se consumă un lucru mecanic L. Să se calculeze raza r a unei particule de mercur dacă se cunoaşte coeficientul de tensiune superficială σ a mercurului.

Rezolvare:

$V \rightarrow$ *volumul picaturii mari şi* $v \rightarrow$ *volumul picaturii mici*

Lucrul mecanic consumat este



$L = \sigma \Delta S$ unde

$\Delta S = n 4\pi r^2 - 4\pi R^2 = 4\pi (nr^2 - R^2)$. Însă $V = nv \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{4\pi R^3}{3} = n \frac{4\pi r^3}{3} \rightarrow R^3 = nr^3 \rightarrow n = \frac{R^3}{r^3}.$$

Substituim $n = \frac{R^3}{r^3}$ în $\Delta S = 4\pi \left(\frac{R^3}{r} - R^2 \right)$ şi cum $L = \sigma \Delta S$,

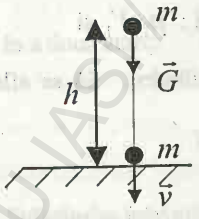
şi avem : $L = \sigma 4\pi \left(\frac{R^3}{r} - R^2 \right) = \sigma 4\pi \frac{R^3}{r} - \sigma 4\pi R^2 \rightarrow$

$$\rightarrow L + 4\pi\sigma R^2 = \frac{4\pi\sigma R^3}{r} \rightarrow \qquad r = \frac{4\pi\sigma R^3}{L + 4\pi\sigma R^2}.$$

84. Un corp dintr-un metal caracterizat prin coeficientul de dilatare α, căldura specifică c şi volum V_0, cade de la înălţimea h şi se ciocneşte cu Pământul. O cantitate din energia sa, de la înălţimea h, este luată în timpul ciocnirii de Pământ, iar numai 40% este absorbită de însăşi corpul respectiv.

Să se calculeze variaţia de temperatură a corpului cât şi volumul final.

Rezolvare:



La înălţimea h, corpul are energia potenţială $E_p = mgh$.

Cantitatea de căldură primită de corp în timpul ciocnirii cu Pământul este

$$Q = \frac{40}{100} mgh = 0{,}4mgh = \frac{4}{10} mgh = \frac{2}{5} mgh$$

Cum $Q = mc\Delta T$, atunci: $\Delta T = \frac{Q}{mc}$. Înlocuind $Q = \frac{2}{5} mgh$ în $\Delta T = \frac{Q}{mc}$

obţinem: $\Delta T = \frac{1}{mc}\frac{2}{5}mgh = \frac{2gh}{5c}$.

Variaţia de temperatură a corpului se calculează cu relaţia : $\Delta T = \frac{2gh}{5c}$.

Din această rezultă relaţie că ΔT depind pentru acelaşi corp de h. Corpul încălzindu-se cu ΔT îşi variază şi volumul, încât volumul în timpul încălzirii se calculează cu formula dilatării în volum:

$V = V_0(1+\gamma\Delta T) = V_0(1+\gamma\frac{2gh}{5c})$. Cum $\gamma = 3\alpha$, atunci

$V = V_0\left(1+3\alpha\frac{2gh}{5c}\right) = V_0\left(1+\frac{6\alpha gh}{5c}\right)$. În urma încălzirii volumul, corpului se calculează cu relaţia : $V = V_0\left(1+\frac{6\alpha gh}{5c}\right)$. Cele două mărimi fizice cerute în problemă sunt: $\Delta T = \frac{2gh}{5c}$ şi $V = V_0\left(1+\frac{6\alpha gh}{5c}\right)$.

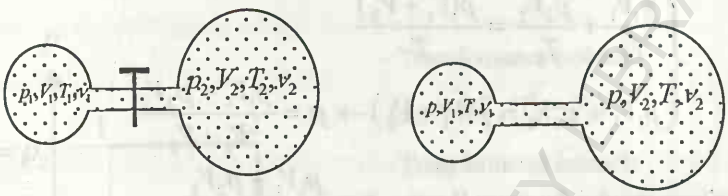
85. Considerăm doi cilindri ce conţine fiecare câte un gaz biatomic şi care comunică printr-un tub de legătură, cu secţiune transversală mică şi prevăzut cu un robinet ce poate fi închis sau deschis la nevoie. Iniţial robinetul este închis iar în fiecare cilindrul gazul se caracterizează prin parametri : p_1, V_1 şi T_1 din primul cilindru şi p_2, V_2 şi T_2 din al doilea cilindru. Să se afle presiunea p şi temperatura T după deschiderea robinetelor.

Rezolvare:

După deschiderea robinetului şi în scurt timp are loc o redistribuire a moleculelor între cei doi cilindri şi prin schimbul de energie, se atinge starea de

echilibru caracterizată printr-o anumită temperatură T şi presiunea p.

Starea I *Starea II*



Scriem legea conservării numărului de Kmoli şi legea conservării energiei interne:

$$(1)\quad \begin{cases} \nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2' \\ U_1 + U_2 = U_1' + U_2' \end{cases}$$

După calcularea: $\nu_1, \nu_2, \nu_1', \nu_2', U_1, U_1', U_2$ şi U_2' şi substituindu-le în sistemul (1), vom obţine un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute în T şi p.

În prima stare: $p_1V_1 = \nu_1 RT_1 \rightarrow \nu_1 = \dfrac{p_1V_1}{RT_1}$;

$$p_2V_2 = \nu_2 RT_2 \rightarrow \nu_2 = \frac{p_2V_2}{RT_2}$$

$$U_1 = \frac{5}{2}\nu_1 RT_1,\ U_2 = \frac{5}{2}\nu_2 RT_2 \quad \text{şi}$$

în a doua stare: $U_1' = \dfrac{5}{2}\nu_1' RT_1,\ U_2' = \dfrac{5}{2}\nu_2' RT_2$

$$\nu_1' = \frac{pV_1}{RT},\ \nu_2' = \frac{pV_2}{RT}$$

Substituim mărimile calculate în sistemul (1) şi căpătăm:

$$\frac{p_1V_1}{RT_1} + \frac{p_2V_2}{RT_2} = \frac{pV_1}{RT} + \frac{pV_2}{RT} \rightarrow \frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p(V_1+V_2)}{T} \quad \text{şi}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{5}{2}\frac{p_1V_1}{RT_1}RT_1+\frac{5}{2}\frac{p_2V_2}{RT_2}RT_2=\frac{5}{2}\frac{pV_1}{RT}RT+\frac{5}{2}\frac{pV_2}{RT}RT\rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{p_1V_1}{T_1}+\dfrac{p_2V_2}{T_2}=\dfrac{p(V_1+V_2)}{T}\\ p_1V_1+p_2V_2=p(V_1+V_2)\rightarrow p=\dfrac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}.\end{cases}$$

Presiunea gazului din starea II este : $p=\dfrac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}$.

Din prima ecuație a sistemului:

$$\frac{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}{T_1T_2}=\frac{V_1+V_2}{T}\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}{T_1T_2}=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{T}\rightarrow$$

$$T=\frac{(p_1V_1+p_2V_2)T_1T_2}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}.$$

Temperatura gazului cerută în problemă este : $T=\dfrac{(p_1V_1+p_2V_2)T_1T_2}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}$

Cele două mărimi fizice cerute în problemă sunt: $p=\dfrac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}$ și

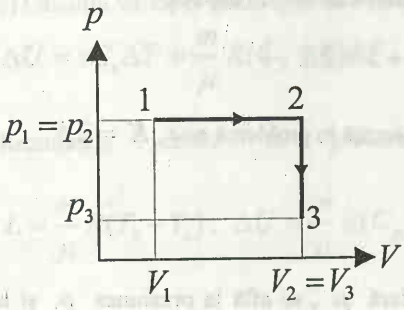
$T=\dfrac{(p_1V_1+p_2V_2)T_1T_2}{p_1V_1T_2+p_2V_2T_1}$.

86. Un gaz monoatomic se află închis într-un cilindru un piston și se destinde izobar astfel că volumul crește de K ori și apoi se răcește izocor încât presiunea scade tot de K ori. Ce valoare trebuie să aibă K dacă gazul schimbă în aceste două transformări izobară și izocoră o cantitate de căldură egală cu energia internă inițială a gazului?

Rezolvare:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Reprezentarea grafică în p-V a celor două transformări: destindere izobară şi răcire izocoră:



- Transformarea izobară:

$$Q_{12} = \nu C_p (T_2 - T_1)$$

- Transformarea izocoră:

$$Q_{23} = \nu C_v (T_3 - T_2)$$

Energia internă în starea 1:

$$U_1 = \frac{3}{2}\nu R T_1.$$

Scriem legea conservării energiei:

$$U_1 = Q_{12} + Q_{23} \rightarrow \frac{3}{2}\nu R T_1 = \nu C_p (T_2 - T_1) + \nu C_v (T_3 - T_2) \text{ (1) unde}$$

$$C_p = C_v + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5R}{2} \text{ şi substituind în (1), avem:}$$

$$\frac{3}{2}\nu R T_1 = \frac{5R}{2}(T_2 - T_1) + \frac{3R}{2}(T_3 - T_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow 3T_1 = 5(T_2 - T_1) + 3(T_3 - T_2) \rightarrow 3T_1 = 5T_2 - 5T_1 + 3T_3 - 3T_2 \rightarrow$$

$\rightarrow 8T_1 = 2T_2 + 3T_3$ (2). Ne trebuiesc relaţiile dintre T_1, T_2, T_3 în funcţie de K şi vom scrie ecuaţiile transformărilor:

1-2 destindere izobară: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$. Cum $V_2 = KV_1$, atunci

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{KV_1}{T_2} \rightarrow T_2 = KT_1$$

2-3 răcire izocoră: $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$. Cum $p_2 = Kp_3$, atunci

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{kp_3}{T_2}=\frac{p_3}{T_3}\rightarrow\frac{K}{KT_1}=\frac{1}{T_3}\rightarrow T_3=T_1$$

Cunoscând : $T_2=KT_1$ şi $T_3=T_1$ şi substituind în 2, obţinem

$$8T_1=2KT_1+3T_1\rightarrow\ 8=2K+3\rightarrow 5=2K\rightarrow$$

$$\rightarrow K=\frac{5}{2}=2{,}5$$ Deci valoarea lui K cerută în problemă este: $K=2{,}5$.

87. O masă de oxigen cu masa molară μ , se află la presiunea p_1 şi la temperatura T_1. După încălzirea izobară, gazul ocupă volumul V_2. Să se afle:

a) căldura absorbită de gaz;

b) lucrul mecanic efectuat de gaz prin destindere;

c) variaţia energiei interne.

Se cunosc : C_p şi R.

Rezolvare:

a) căldura absorbită de gaz: $Q_p=\nu C_p\Delta T=\frac{m}{\mu}C_p(T_2-T_1)$.

Transformarea izobară: $\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2}\rightarrow T_2=\frac{V_2T_1}{V_1}$. Pe V_1 îl aflăm din starea iniţială: $p_1V_1=\frac{m}{\mu}RT_1\rightarrow V_1=\frac{mRT_1}{\mu p_1}$, încât :

$$T_2=V_2T_1\frac{\mu p_1}{mRT_1}=\frac{V_2\mu p_1}{mR}\rightarrow T_2=\frac{p_1V_2\mu}{mR}.$$ Cunoscând T_2, C_p şi T_1, se poate afla Q_p din relaţia: $Q_p=\frac{m}{\mu}C_p(T_2-T_1)$.

b) Lucrul mecanic prin destinderea izobară se calculează cu relaţia:

BCU "ASE" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$L = \nu R\Delta T = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

c) Calculul variaţiei interne, se face cu ajutorul formulei:,

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T = \frac{m}{\mu} R(C_p - R)\Delta T.$$

Rezultatele cerute în problemă sunt: $Q_p = \frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1)$,

$$L = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1),\ \Delta U = \frac{m}{\mu} R(C_p - R)\Delta T$$

88. Considerând că un motor termic ar funcţiona după unul din ciclurile următoare (în desenele alăturate), utilizând ca substanţă de lucru un gaz ideal, să se determine:

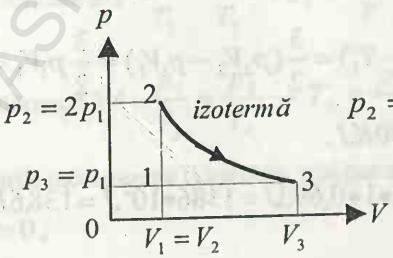
a) lucrul mecanic în cursul unui ciclu;

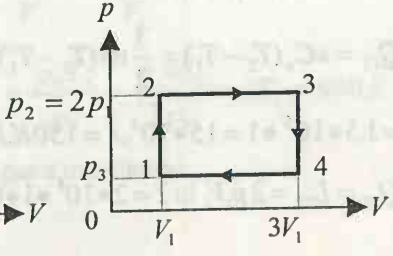
b) cantitatea de căldură primită de la sursa caldă Q_1 şi cantitatea de căldură cedată sursei reci Q_2;

c) să se reprezinte ciclurile în coordonate (p,T) şi (V,T). Se cunosc: $V_1 = 1m^3$

$p_1 = 10^5\ N/m^2$; $t_1 = 27^0 C$; $C_V = \frac{3}{2}R$; $R = 8310\ J/Kmol \bullet K$;

$\ln 2 = 0{,}693$. (Bacalaureat, iunie 1984)





BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:

Vom considera ciclul : 12312:

Se află lucrul mecanic pentru fiecare transformare:

a) $L_{12}=0$, $L_{23}=\nu RT_2\ln\frac{V_3}{V_2}=\nu RT_2\ln 2$. Pentru transformarea de la

2-3 scriem: $p_2V_2=p_3V_3\to 2p_1V_2=p_1V_3\to V_3=2V_2\to V_3=2V_1$.

Din transformarea 1-2:

$$\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_2}{T_2}\to T_2=\frac{p_2T_1}{p_1}=\frac{2p_1T_1}{p_1}=2T_1=600K,\quad T_1=t_1+273=300K.$$

Știind $p_2V_2=\nu RT$ și substituind în L_{23} obținem

$$L_{23}=p_2V_2\ln 2=2p_1V_1\ln 2$$

Numeric: $L_{23}=2\bullet 10^5\bullet 1\bullet 0{,}693=1386\bullet 10^2J=138{,}6KJ$.

Valoarea lucrului mecanic L_{23} este $L_{23}=138{,}6KJ$.

Lucrul mecanic în transformarea izobară: 3-1 se calculează cu formula:

$$L_{31}=p_1(V_1-V_3)=p_1(V_1-2V_1)=-p_1V_1.$$

Numeric: $L_{31}=-10^5\bullet 1J=-10^5J=-100KJ$.

Lucrul mecanic total este: $L=L_{12}+L_{23}+L_{31}=0+138{,}6Kj-100Kj=$

$=38{,}6Kj$.

b) Căldura primită $Q_1=Q_{12}+Q_{23}$, iar căldura cedată $Q_2=Q_{31}$

$$Q_{12}=\nu C_v(T_2-T_1)=\frac{3}{2}\nu R(T_2-T_1)=\frac{3}{2}(p_2V_2-p_1V_1)=\frac{3}{2}p_1V_1=$$

$=1{,}5\bullet 10^5\bullet 1=15\bullet 10^4J=150KJ$.

$Q_{23}=L_{23}=2p_1V_1\ln 2=2\bullet 10^5\bullet 1\bullet 0{,}693J=1386\bullet 10^2J=138{,}6KJ$.

BCUAS / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$Q_{31} = \nu C_v \Delta T = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}(T_1 - T_2) = -\frac{5}{2} p_1 V_1 = -2{,}5 \bullet 10 \bullet 1 = -25KJ .$$

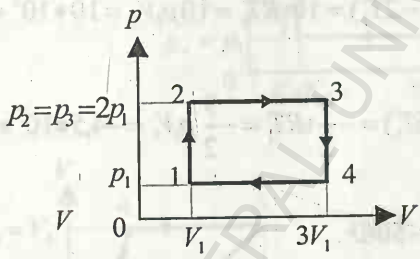
Căldura cedată: $Q_2 = Q_{31} = -25KJ$.

Vom considera ciclul 12341: format din două izocore 1-2 şi 3-4 şi două izobare 2-3 şi 4-1.

În mod analog vom calcula:

Lucrul mecanic în fiecare transformare, apoi lucrul mecanic: total, căldurile în fiecare transformare şi apoi căldura primită şi cea cedată. Ciclul fiind închis $\Delta U = 0$.

Aflarea lucrurilor mecanice în fiecare transformare:



Transformare 1-2 : $L_{12} = 0$;

Transformare 2-3 : $L_{23} = p_2(V_3 - V_2)$;

Transformare 3-4 : $L_{34} = 0$;

Transformare 4-1 : $L_{41} = p_1(V_1 - V_4)$;

Transformare 1-2 : $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{p_2 T_1}{p_1} = \frac{2p_1 T_1}{p_1} = 2T_1 = 2 \bullet 300 =$

$= 600K$.

Transformare 2-3 : $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \rightarrow T_3 = \frac{V_3 T_2}{V_2} = \frac{3V_1 2T_1}{V_1} = 6T_1 = 1800K$.

Transformare 3-4 : $\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4} \rightarrow T_4 = \frac{p_4 T_3}{p_3} = \frac{p_1 6T_1}{2p_1} = 3T_1 = 900K$.

Lucrurile mecanice pe fiecare din cele patru transformări:

$L_{12} = 0$;

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$L_{23} = p_2(V_3 - V_2) = 2p_1(3V_1 - V_1) = 4p_1V_1 = 4 \bullet 10^5 J = 400KJ$;

$L_{34} = 0$;

$L_{41} = p_1(V_1 - V_4) = p_1(V_1 - 3V_1) = -2p_1V_1 = -2 \bullet 10^5 J = -200KJ$.

Lucrul mecanic total: $L = L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{41} = 0 + 4p_1V_1 - 2p_1V_1 =$

$= 200KJ$.

Aflarea căldurilor în fiecare transformare.

$$Q_{12} = \nu C_v(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu R(2T_1 - T_1) = \nu\frac{3}{2}RT_1 = \frac{3}{2}p_1V_1 = 1{,}5 \bullet 10^5 \bullet 1 =$$

$$= 1{,}5 \bullet 10^5 J = 150KJ.$$

$$Q_{23} = \nu C_v(T_3 - T_2) = \frac{5}{3}\nu R(6T_1 - 2T_1) = 10\nu RT_1 = 10p_1V_1 = 10 \bullet 10^5 \bullet 1 =$$

$$= 1000KJ.$$

$$Q_{34} = \nu C_v(T_4 - T_3) = \frac{3}{2}\nu R(3T_1 - 6T_1) = -\frac{9}{2}\nu RT_1 = -\frac{9}{2}p_1V_1 = -4{,}5 \bullet 10^5 \bullet 1 =$$

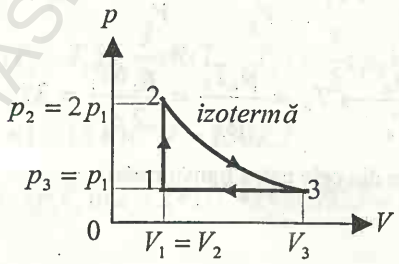
$$= -450KJ.$$

$Q_{41} = \nu C_p(T_1 - T_4) = -5 \bullet p_1V_1 = -500J$.

Căldura primită : $Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = 150KJ + 1000KJ = 1150KJ$.

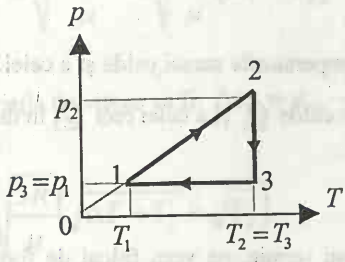
Căldura cedată: $Q_{34} + Q_{41} = -450KJ - 500KJ = -950KJ$

c) Întrucât ciclul este închis : $\Delta U = 0$ Să se reprezinte ciclurile date în coordonate (p,T) şi (V,T) pentru ciclul:

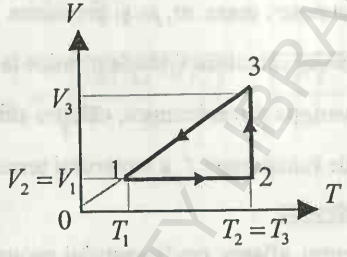


BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

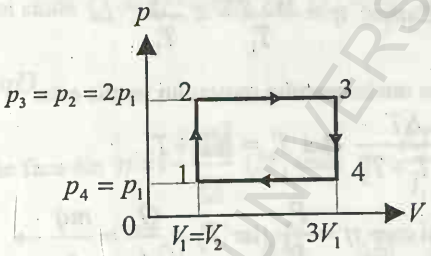
În coordonate p-T

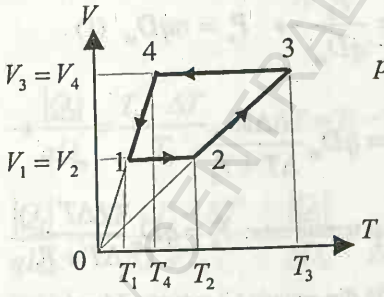


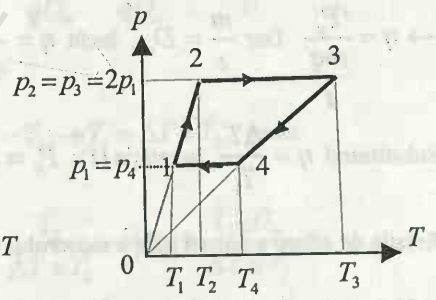
În coordonate V-T



Pentru ciclul:







89. Un motor termic cu ardere internă funcționează sub variația de temperatură ΔT în timp ce temperatura sursei reci este T_2. Se cunosc debitul masă a combustibiluli D_m și puterea calorică a combustibilului q, să se afle:

a) randamentul motorului termic cât și puterea utilă;

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) volumul substanței de lucru V_1 la temperatura T_1 a sursei calde, dacă se cunosc : masa m, μ și presiunea p_1

c) Să se calculeze vitezele termice la temperaturile sursei calde și a celei reci, variația vitezeitermice, căldura sursei calde Q_1 și a celei reci Q_2 în timpul de funcționare t a motorului termic.

Rezolvare:

a) Pentru aflarea randamentului motorului termic, ne vom folosi de formula randamentului ciclului Carnot: $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1}$.

Relația pentru calcularea randamentului motorului termic este:

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{\Delta T}{\Delta T + T_2} \text{ căci } T_1 = \Delta T + T_2 .$$

Știind $\eta = \frac{\Delta T}{\Delta T + T_2}$ și cum $\eta = \frac{P_u}{P_c}$ iar $P_c = \frac{Q_c}{t} = \frac{mq}{t} \rightarrow$

$\rightarrow \eta = \frac{P_u}{\frac{mq}{t}}$. Dar $\frac{m}{t} = D_m$, încât $\eta = \frac{P_u}{qD_m} \rightarrow \quad P_u = \eta q D_m \quad (1)$.

Substituind $\eta = \frac{\Delta T}{T_1}$, în relația (1): $P_u = qD_m \frac{\Delta T}{\Delta T + T_2}$.

Relația de aflare a puterii utile a motorului termic este: $P_u = qD_m \frac{\Delta T}{\Delta T + T_2}$.

b) Volumul substanței de lucru V_1, se află din ecuația Clapeyron-Mendeleev:

$p_1 V_1 = \nu R T_1 \rightarrow V_1 = \frac{\nu R T_1}{p_1} = \frac{m}{\mu} \frac{R T_1}{p_1}$. Însă $\Delta T = T_1 - T_2$ și atunci:

$T_1 = \Delta T + T_2$, încât $V_1 = \frac{m}{\mu} \frac{R}{p_1} (\Delta T + T_2)$.

c) Viteza termică în cele două cazuri de T_1 și T_2, se calculează:

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$v_{T1}=\sqrt{\frac{3RT_1}{\mu}}=\sqrt{\frac{3R}{\mu}(\Delta T+T_2)}$ şi $v_{T2}=\sqrt{\frac{3RT_2}{\mu}}$

Variaţia de viteze va fi: $\Delta v_T=v_{T1}-v_{T2}=\sqrt{\frac{3R(\Delta T+T_2)}{\mu}}-\sqrt{\frac{3RT_2}{\mu}}=$

$=\sqrt{\frac{3R}{\mu}}\left(\sqrt{\Delta T+T_2}-\sqrt{T_2}\right).$

Căldura sursei calde $Q_1=Q_c=mq$ dar $D_m=\frac{m}{t}$ şi atunci $m=tD_m$,

încât: $Q_1=qD_m$.

Aflarea Q_2 se face din $\eta=1-\frac{|Q_2|}{Q_1}$ (2), unde $\eta=\frac{\Delta T}{T_1}$ şi $Q_1=qD_m$ pe care

le substituim în relaţia (2): $\frac{\Delta T}{T_1}=1-\frac{|Q_2|}{qD_m}\rightarrow\frac{|Q_2|}{qD_m}=1-\frac{\Delta T}{T_1}=\frac{T_1-\Delta T}{T_1}\rightarrow$

$\rightarrow\frac{|Q_2|}{qD_m}=\frac{T_1-\Delta T}{T_1}$, dar $\Delta T=T_1-T_2\rightarrow T_1=\Delta T+T_2$, încât:

$\frac{|Q_2|}{qD_m}=\frac{\Delta T+T_2-\Delta T}{\Delta T+T_2}\rightarrow\frac{|Q_2|}{qD_m}=\frac{T_2}{\Delta T+T_2}\rightarrow|Q_2|=\frac{T_2qD_m}{\Delta T+T_2}.$

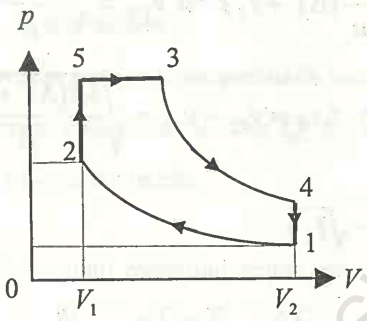
La punctul c) al problemei avem următoarele rezultate:

$v_{T1}=\sqrt{\frac{3R}{\mu}(\Delta T+T_2)}$ şi $v_{T2}=\sqrt{\frac{3RT_2}{\mu}}$.

$\Delta v_T=\sqrt{\frac{3R}{\mu}}\left(\sqrt{\Delta T+T_2}-\sqrt{T_2}\right)$, $Q_1=qD_m$ şi $|Q_2|=\frac{T_2qD_m}{\Delta T+T_2}$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

90. Un gaz ideal efectuează ciclul în figura alăturată:



Să se calculeze randamentul ciclului, unde $\lambda = \frac{p_5}{p_2}$, $\rho = \frac{V_3}{V_5}$ şi $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$.

(Culegere Cone, pag.207 /1996)

Rezolvare:

Randamentul ciclului are formula : $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$, unde :

$Q_1 = Q_{25} + Q_{53}$ şi $|Q_2| = |Q_{41}|$.

$Q_{25} = \upsilon C_v (T_5 - T_2)$, $Q_{53} = \upsilon C_p (T_3 - T_5)$ şi $|Q_{41}| = \upsilon C_v (T_4 - T_1)$.

Căldurile Q_1 şi $|Q_2|$ au relaţiile:

$Q_1 = \upsilon C_v (T_5 - T_2) + \upsilon C_p (T_3 - T_5)$ şi $|Q_2| = \upsilon C_v (T_4 - T_1)$.

Substituim Q_1 şi $|Q_2|$ în formula randamentului η şi obţinem:

$$\eta = 1 - \frac{\upsilon C_v (T_4 - T_1)}{\upsilon C_v (T_5 - T_2) + \upsilon C_p (T_3 - T_5)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_5 - T_2 + \frac{C_p}{C_v}(T_3 - T_5)} =$$

$$= 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_5 - T_2 + \gamma (T_3 - T_5)} = 1 - \frac{T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{T_2 \left(\frac{T_5}{T_2} - 1 \right) + \gamma T_5 \left(\frac{T_3}{T_5} - 1 \right)} =$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= 1 - \frac{T_1\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)}{T_2\left[\left(\frac{T_5}{T_2} - 1\right) + \gamma\frac{T_5}{T_2}\left(\frac{T_3}{T_5} - 1\right)\right]} \quad (1).$$

Din adiabata 1-2 : $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{1-\gamma}$. Din izocora 2-5: $\frac{T_5}{T_2} = \frac{p_5}{p_2} = \lambda$.

Din izobara 5-3: $\frac{V_3}{V_5} = \frac{T_3}{T_5} = \rho$. Din transformarea adiabatică 3-4:

$p_3 V_3^{\gamma} = p_4 V_4^{\gamma}$ şi din figură se vede că $V_4 = V_1$, încât:

$p_3 V_3^{\gamma} = p_4 V_1^{\gamma}$. Din transformarea adiabatică: 1-2, avem:

$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$. Cele două relaţii: $p_3 V_3^{\gamma} = p_4 V_1^{\gamma}$ şi

$p_2 V_2^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma}$, le împărţim şi obţinem:

$$\frac{p_3 V_3^{\gamma}}{p_2 V_2^{\gamma}} = \frac{p_4 V_1^{\gamma}}{p_1 V_1^{\gamma}} \rightarrow \frac{p_3}{p_2}\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma} = \frac{p_4}{p_1}.$$

Cum $p_3 = p_5$ şi $V_2 = V_5$, atunci relaţia : $\frac{p_3}{p_2}\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma} = \frac{p_4}{p_1}$,

se mai poate scrie: $\frac{p_5}{p_2}\left(\frac{V_3}{V_5}\right)^{\gamma} = \frac{p_4}{p_1}$. Dar $\frac{p_5}{p_2} = \lambda$ şi $\frac{V_3}{V_5} = \rho$,

încât avem relaţia: $\lambda\rho^{\gamma} = \frac{p_4}{p_1}$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din transformarea izocoră 4-1 , putem scrie : $\frac{T_4}{T_1}=\frac{p_4}{p_1}$, iar din relaţiile $\lambda\rho^{\gamma}=\frac{p_4}{p_1}$ şi $\frac{T_4}{T_1}=\frac{p_4}{p_1}$, rezultă relaţia : $\lambda\rho^{\gamma}=\frac{T_4}{T_1}$.

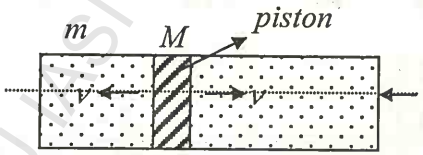
Cunoscându-se : $\frac{T_1}{T_2}=\varepsilon^{1-\gamma}$, $\frac{T_4}{T_1}=\lambda\rho^{\gamma}$, $\frac{T_5}{T_2}=\lambda$ şi $\frac{T_3}{T_5}=\rho$ şi substituindu-le în relaţia (1) al randamentului, obţinem:

$\eta=1-\frac{\lambda\rho^{\gamma}-1}{\lambda-1+\gamma\lambda(\rho-1)}\frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$. Deci relaţia randamentului ciclului din figura dată este: $\eta=1-\frac{\lambda\rho^{\gamma}-1}{\lambda-1+\gamma\lambda(\rho-1)}\frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$.

91. Într-un cilindru de masă m închis la capete cu feţe plane şi izolat termic, se află în echilibru un piston de masă M. În cele două compartimente ale cilindrului se află câte un mol de gaz ideal cu căldură molară la volum C_v. Cilindrului i se transmite un impuls p de-a lungul axei sale. Să se calculeze variaţia temperaturii gazului din cilindru după încetarea oscilaţiei pistonului. Frecarea dintre piston şi cilindru este neglijabilă.

(Culegere Cone, pag.202 /1996).

Rezolvare:



Impulsul imprimat sistemului fizic

Sistemul fizic primind un impuls, pistonul începe să oscileze şi după încetarea oscilaţiei se constată o creştere ΔT a temperaturii gazului din cele

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

două compartimente. Între piston şi cilindru nu există frecare, încât putem scrie:

$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v^2 = \Delta U \quad (1), \text{ unde}$$

$$\Delta U = 2\nu C_v \Delta T \quad \text{iar } p = (m+M)v \rightarrow v = \frac{p}{m+M}$$

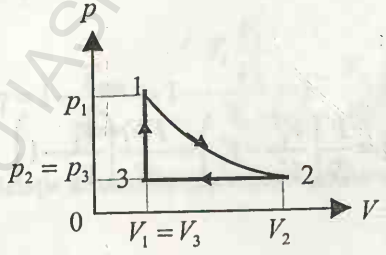
Relaţia (1) devine: $\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}\frac{p^2}{(m+M)^2} = 2\nu C_v \Delta T \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\frac{mMp^2}{(m+M)^3} = 2\nu C_v \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{mMp^2}{4\nu C_v (m+M)^3}, \text{ unde}$$

$\nu = 1mol$, încât: $\Delta T = \frac{mMp^2}{4C_v(m+M)^3}$

Variaţia de temperatură în sistemul fizic va fi: $\Delta T = \frac{mMp^2}{4C_v(m+M)^3}$.

92. Asupra pistonului cu suprafaţa S din ciclu unei maşini termice se găseşte aer la temperatura T_1, de volum V_1 şi exercită asupra pistonului o forţă F. Substanţa de lucru suferă o transformare izotermă, după care o transformare izobară de răcire şi în fine o transformare izocoră de încălzire conform ciclului închis 1231.



Se cunosc:

în starea 1: V_1, T_1 şi forţa F;

în starea 2: V_2

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se calculeze

a) p, V, T în toate stările 1,2,3;

b) lucrurile mecanice în cele trei transformări, precum şi lucrul total;

c) randamentul Carnot între temperaturile maxime şi minime ale ciclului reprezentat

Rezolvare:

a) Aflarea p, V, T în stările 1,2 şi 3.

În starea 1: $p_1 = \frac{F}{S}$

În starea 2: Se cunosc $T_2 = T_1$, deoarece din starea 1 în starea 2 substanţa de lucru suferă o destindere izotermă, încât: $p_1 V_1 = p_2 V_2 \rightarrow$

$$\rightarrow p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{F}{S}\frac{V_1}{V_2} \rightarrow p_2 = \frac{F}{S}\frac{V_1}{V_2}.$$

În starea 3: $p_2 = p_3 = \frac{F}{S}\frac{V_1}{V_2}$. Trebuie aflat pe T_3 din transformarea de la 2 la 3: $\frac{V_2}{T_1} = \frac{V_1}{T_3} \rightarrow T_3 = \frac{T_1 V_1}{V_2}$.

b) Trebuiec aflate : L_{12}, L_{23}, L_{31} şi L.

$L_{12} = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$, unde $p_1 V_1 = \nu R T_1$ şi atunci: $L_{12} = p_1 V_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$ şi cum $p_1 = \frac{F}{S}$, rezultă $L_{12} = \frac{F}{S} V_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$;

$$L_{23} = p_2(V_3 - V_2) = \frac{F}{S}\frac{V_1}{V_2}(V_1 - V_2) = \frac{F}{S}\left(\frac{V_1^2}{V_2} - V_1\right) = \frac{F V_1}{S}\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)$$

$$L_{31} = 0$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Lucrul mecanic total: $L = L_{12} + L_{23} + L_{31} = \frac{F}{S} V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{F V_1}{S}\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) =$

$= V_1\left[\frac{F}{S} \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{F}{S}\frac{(V_1 - V_2)}{V_2}\right].$

c) Randamentul Carnot: temperatura absoluta maximă este T_1 din starea 1 și temperatura minimă este T_3 din starea finală 3.

Pentru aflarea T_3 ne folosim de ecuația Clapeyron-Mendeleev :

$$p_3 V_3 = \nu R T_3 \rightarrow T_3 = \frac{p_3 V_3}{\nu R}.$$

În starea 1: $p_1 V_1 = \nu R T_1 \rightarrow \nu R = \frac{p_1 V_1}{T_1}$ și înlocuind în relația lui $T_3 = \frac{p_3 V_3}{\nu R}$ obținem: $T_3 = \frac{p_3 V_3 T_1}{p_1 V_1} = \frac{p_2 V_1 T_1}{p_1 V_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1}$. Dar $p_2 = \frac{F}{S}\frac{V_1}{V_2}$ și substituind în $T_3 = \frac{p_2 T_1}{p_1} = \frac{T_1}{p_1}\frac{F}{S}\frac{V_1}{V_2}$ și cum $p_1 = \frac{F}{S}$, atunci

$$T_3 = T_1 \frac{F}{S}\frac{V_1}{V_2}\frac{S}{F} = T_1 \frac{V_1}{V_2}.$$

Cunoscând T_1 și $T_3 = T_1 \frac{V_1}{V_2}$, se poate afla randamentul ciclului:

$$\eta = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_1 \frac{V_1}{V_2}}{T_1} = 1 - \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_2 - V_1}{V_2}.$$

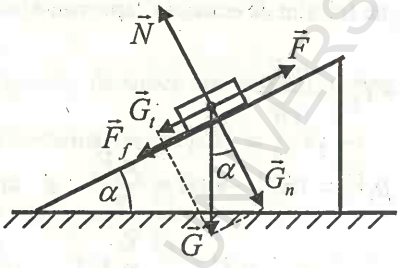
Relația de calcularea a randamentului este: $\eta = \frac{V_2 - V_1}{V_2}$.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

93. Pentru deplasarea unui corp pe un plan înclinat de un unghi α, cu viteză constantă v se foloseşte o maşină termică ce funcţionează după un ciclu Carnot între temperaturile T_1 şi T_2. Corpul are masa m, iar coeficientul de frecare dintre corp şi plan este μ.

Să se afle puterea motorului, randamentul acestuia, precum şi cantităţile de căldură ale sursei calde şi a celei reci în timpul t cât funcţionează maşina termică de deplasare a corpului.

Rezolvare:



Scriem formula puterii: $P = \frac{L}{t} = \frac{Fd}{t}$. Întrucât mişcarea pe plan a corpului, este uniformă: $\frac{d}{t} = v$ şi atunci $P = Fv$.

Aflăm forţa F. Din figură se vede că:

$F = G_t + F_f = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha =$

$= mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, încât $P = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)v$.

Randamentul motorului: $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

Se cunosc T_1 şi T_2 se poate afla randamentul maşinii termice.

Aflarea cantităţilor de căldură Q_1 şi $|Q_2|$. La o maşină termică :

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Pt}{Q_1}$, iar $Q_1 = \frac{Pt}{\eta} = \frac{Pt}{\frac{T_1 - T_2}{T_1}} = \frac{PtT_1}{T_1 - T_2}$.

Cantitatea de căldură a sursei calde Q_1, se calculează cu relația: $Q_1 = \frac{PtT_1}{T_1 - T_2}$

Pentru calcularea $|Q_2|$ se pleacă de la relația : $Q_1 - |Q_2| = L$ și cum

$L = Pt$, atunci : $Q_1 - |Q_2| = Pt \rightarrow Q_1 - Pt = |Q_2|$

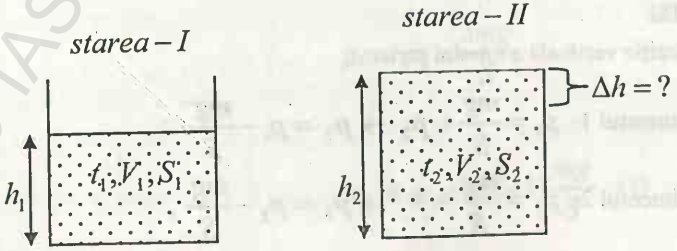
Avem rezultatele: $P = Fv = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)v$, $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, și

$Q_1 = \frac{PtT_1}{T_1 - T_2}$. Cunoscând pe Q_1 și P, putem afla pe $|Q_2| = Q_1 - Pt =$

$= \frac{PtT_1}{T_1 - T_2} - Pt = Pt\left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} - 1\right) \rightarrow |Q_2| = \frac{PtT_2}{T_1 - T_2}$.

94. Într-un vas cilindric dintr-un metal cu coeficientul de dilatare γ se află apă la temperatura t_1 iar înălțimea apei din vas este de h_1. Să se afle cu cât se ridică nivelul apei Δh din vas dacă temperatura apei variază cu Δt iar coeficientul de dilatare volumică a apei este γ.

Rezolvare:



Pentru aflarea lui Δh ne trebuie h_2, deoarece $\Delta h = h_2 - h_1$.

Pentru vasul din metal: $S_2 = S_1(1+2\alpha\Delta t)$ iar pentru apa din vas :

$V_2 = V_1(1+\gamma\Delta t)$. Dar $V_1 = S_1 h_1$ şi $V_2 = S_2 h_2 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{V_2}{S_2}\frac{S_1}{V_1} = \frac{V_1(1+\gamma\Delta t)S_1}{S_1(1+2\alpha\Delta t)V_1} = \frac{1+\gamma\Delta t}{1+2\alpha\Delta t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{1+\gamma\Delta t}{1+2\alpha\Delta t} \rightarrow \frac{h_2 - h_1}{h_1} = \frac{1+\gamma\Delta t - 1 - 2\alpha\Delta t}{1+2\alpha\Delta t} =$$

$$= \frac{(\gamma - 2\alpha)\Delta t}{1+2\alpha\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta h}{h_1} = \frac{(\gamma - 2\alpha)\Delta t}{1+2\alpha\Delta t} \rightarrow \Delta h = h_1 \frac{(\gamma - 2\alpha)\Delta t}{1+2\alpha\Delta t}$$

Când temperatura apei variază cu Δt, atunci nivelul apei se ridică cu Δh şi se calculează cu relaţia: $\Delta h = h_1 \dfrac{(\gamma - 2\alpha)\Delta t}{1+2\alpha\Delta t}$.

95. Un tub cilindric orizontal de secţiune transversală S este închis la ambele capete şi împărţit în n compartimente agale cu ajutorul a $n-1$ pistoane identice de masă m. Se neglijează frecările. Presiunea aerului este identică peste tot p. Se cere presiunea p_k când tubul este adus în poziţia verticală, iar fiecare compartiment satisface relaţia $V_k = KV_1$ unde $K = 1,2,3,....n$.

(Culegere Galbură + Rusu + Georgescu pag.15 ed. 1993)

Rezolvare:

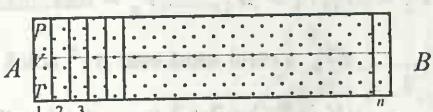
Pentru poziţie verticală a tubului scriem:

Compartimentul 1: $p_1 = \dfrac{mg}{S} + p_2 \rightarrow p_2 = p_1 - \dfrac{mg}{S}$

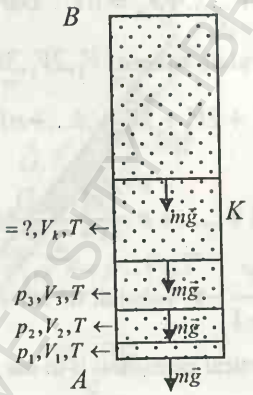
Compartimentul 2: $p_2 = \dfrac{mg}{S} + p_3 \rightarrow p_3 = p_2 - \dfrac{mg}{S}$,

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tubul în poziție orizontală — *Starea – I*



Tubul în poziție verticală — *Starea – II*



cum $p_2 = p_1 - \frac{mg}{S}$, atunci $p_3 = p_1 - \frac{2mg}{S}$

Compartimentul 3: $p_3 = \frac{mg}{S} + p_4 \rightarrow p_4 = p_3 - \frac{mg}{S}$

Dar $p_3 = p_1 - \frac{2mg}{S}$ și înlocuind avem: $p_4 = p_1 - \frac{3mg}{S}$

Compartimentul K: $p_k = p_1 - (K-1)\frac{mg}{S}$

Pe verticală avem presiunile: p_1

$$p_2 = p_1 - \frac{mg}{S}$$

$$p_3 = p_1 - \frac{2mg}{S}$$

$$p_4 = p_1 - \frac{3mg}{S}$$

$$\vdots$$

$$p_K = p_1 - (K-1)\frac{mg}{S} \quad (1)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru aflarea p_k avem nevoie de p_1. Când tubul este pe orizontală, volumul total este nV, iar când este pe verticală volum total este:

$V_1+V_2+.....+V_n=nV$. Dar $V_2=2V_1, V_3=3V_1,....., V_n=nV_1$.

Avem şirul de volume: $V_1, 2V_1, 3V_1, ..., nV_1$ a cărui sumă este nV adică

$nV=V_1+2V_1+3V_1+.....+nV_1 \rightarrow \quad nV=V_1(1+2+3+.....+n)$ unde

$1+2+3+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$ şi atunci : $nV=V_1\frac{n(n+1)}{2}\rightarrow$

$V_1=\frac{2V}{n+1}\rightarrow$ volumul de aer ocupat de compartimentul 1, când tubul este aşezat vertical cu capătul B în sus şi A în jos. Scriem legea transformării izoterme din compartimentul 1 ale gazului din tubul din poziţia verticală şi orizontală : $p_1V_1=pV\rightarrow$

$p_1=\frac{pV}{V_1}$. Dar $V_1=\frac{2V}{n+1}$, încât relaţia $p_1=\frac{pV}{V_1}$ devine:

$p_1=pV\frac{n+1}{2V}=\frac{p(n+1)}{2}\rightarrow p_1=\frac{p(n+1)}{2}$. Având cunoscut

$p_1=\frac{p(n+1)}{2}$ pe care îl substituim în (1), obţinem:

$p_K=\frac{p(n+1)}{2}-(K-1)\frac{mg}{S}$.

Presiunea de ordinul K când tubul este adus vertical se poate calcula cu relaţia :

$p_K=\frac{p(n+1)}{2}-(K-1)\frac{mg}{S}$.

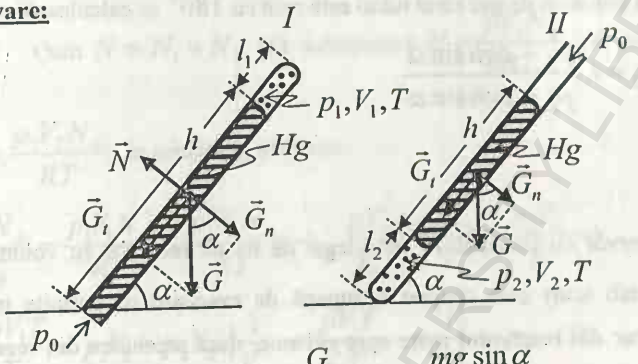
96. Într-un tub capilar sudat la un capăt se închide o masă de gaz cu o coloană de mercur de lungime h. Atunci când tubul este înclinat faţă de verticală cu un unghi α, coloana de gaz are lungimea l_1. Ce lungime are coloana de gaz

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

atunci când, manevrând cu atenție, tubul își schimbă poziția cu 180^0 ?

(Culegere Galboră pag.13 ed. 1993)

Rezolvare:



În starea I putem scrie: $p_0 = p_1 + \frac{G_t}{S} = p_1 + \frac{mg\sin\alpha}{S} =$

$$= p_1 + \frac{V\rho g\sin\alpha}{S} = p_1 + \frac{Sh\rho g\sin\alpha}{S} = p_1 + \rho gh\sin\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow p_1 = p_0 - \rho gh\sin\alpha .$$

Presiunea gazului în starea I este: $p_1 = p_0 - \rho gh\sin\alpha$.

În starea II putem scrie: $p_0 + \frac{G_t}{S} = p_2 \rightarrow$

$$p_2 = p_0 + \frac{Sh\rho g\sin\alpha}{S} = p_0 + \rho gh\sin\alpha \rightarrow p_2 = p_0 + \rho gh\sin\alpha .$$

Presiunea gazului în starea II este : $p_2 = p_0 + \rho gh\sin\alpha$.

Pentru aflarea lungimea coloanei l_2 de gaz vom scrie legea transformărilor izoterme, din starea I în II: $p_1V_1 = p_2V_2$ (1), unde: $V_1 = Sl_1$, $V_2 = Sl_2$, $p_1 = p_0 - \rho gh\sin\alpha$ și $p_2 = p_0 + \rho gh\sin\alpha$ și pe care le substituim în relația (1); $(p_0 - \rho gh\sin\alpha)Sl_1 = (p_0 + \rho gh\sin\alpha)Sl_2 \rightarrow$

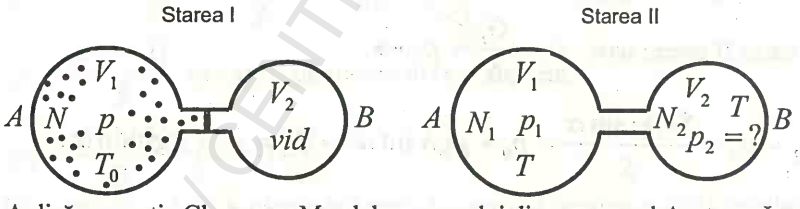
BCU MUNTENIA CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\rightarrow l_2 = l_1 \frac{p_0 - \rho g h \sin\alpha}{p_0 + \rho g h \sin\alpha}.$$

Lungimea coloanei de gaz când tubul este rotit cu 180^0 se calculează cu relația : $l_2 = l_1 \frac{p_0 - \rho g h \sin\alpha}{p_0 + \rho g h \sin\alpha}$.

97. U rezervor cu volumul V_1 este legat de un alt rezervor cu volumul V_2 printr-un tub scurt care conține o supapă de evacuare ce permite trecerea gazului doar din rezervorul mare spre cel mic, dacă presiunea din rezervorul mare depășește presiunea din rezervorul mic cu p_0. Dacă la T_0 rezervorul mai mare conține gaz la presiunea atmosferică p și rezervorul mai mic este vidat, ce presiune p_2 are gazul din rezervorul mic când ambele rezervoare au $T = ?$ (Culegere Cone pag.193 /1996)

Rezolvare:



Aplicăm ecuația Clapeyron-Mendeleev gazului din rezervorul A, starea I:

$pV_1 = \nu RT_0 = \frac{N}{N_A} RT_0$ unde $N \rightarrow$ numărul total de molecule din V_1 și $N_A \rightarrow$ numărul Avogadro. În starea II: numărul de molecule din rezervorul mare este: $N_1 = = \frac{p_1 V_1 N_A}{RT}$ iar din rezervorul mic este: $N_2 = = \frac{p_2 V_2 N_A}{RT}$,

deoarece supapa fiind deschisă, pătrund N_2 molecule în rezervorul mic şi în rezervorul mare rămân N_1 molecule.

Cum $N = N_1 + N_2$ (1) substituind $N = \frac{pV_1N_A}{RT_0}$, $N_1 = \frac{p_1V_1N_A}{RT}$

$N_2 = \frac{p_2V_2N_A}{RT}$ în relaţia (1) obţinem :

$$\frac{pV_1N_A}{RT_0} = \frac{p_1V_1N_A}{RT} + \frac{p_2V_2N_A}{RT} \rightarrow \frac{pV_1}{T_0} = \frac{p_1V_1}{T} + \frac{p_2V_2}{T} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{pV_1T}{T_0} = p_1V_1 + p_2V_2 \left| \frac{1}{V_2} \right. \rightarrow \frac{pV_1T}{V_2T_0} - p_1\frac{V_1}{V_2} = p_2 \quad (2).$$

Cum $p_1 > p_2$, atunci $p_1 - p_2 = p_0 \rightarrow p_1 = p_0 + p_2$. Valoarea $p_1 = p_0 + p_2$, o introducem în relaţia (2):

$$\frac{pV_1T}{V_2T_0} - (p_0 + p_2)\frac{V_1}{V_2} = p_2 \rightarrow \frac{pV_1T}{V_2T_0} - p_0\frac{V_1}{V_2} - p_2\frac{V_1}{V_2} = p_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{pV_1T}{V_2T_0} - p_0\frac{V_1}{V_2} = p_2\left(1 + \frac{V_1}{V_2}\right) \rightarrow \frac{V_1}{V_2}\left(\frac{pT}{T_0} - p_0\right) = p_2\left(1 + \frac{V_1}{V_2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow V_1\left(\frac{pT}{T_0} - p_0\right) = p_2(V_1 + V_2) \rightarrow p_2 = \frac{V_1}{V_1 + V_2}\left(\frac{pT}{T_0} - p_0\right).$$

Presiunea p_2 din rezervorul mic, după deschiderea supapei de evacuare se calculează cu relaţia: $p_2 = \frac{V_1}{V_1 + V_2}\left(\frac{pT}{T_0} - p_0\right)$.

98. Să se calculeze căldura molară a unui gaz ideal într-un proces în care temperatura gazului:

a) este proporţională cu pătratul volumului gazului şi

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) este invers proporţională cu volumul său. Se cunoaşte căldura molară la volum constant a gazului C_v.

(Culegere Cone, pag.200 /1996)

Rezolvare:

a) Se dă $T = aV^2$ unde a este un coeficient de proporţionalitate.

Ne folosim de formula primului principiu al termodinamicii: $Q = \Delta U + \Delta L$, unde $Q = \nu C\Delta T$ şi $\Delta U = \nu C_v \Delta T$, încât obţinem $\nu C\Delta T = \nu C_v \Delta T + \Delta L$.

Această formulă este scrisă în ΔT, însă se poate scrie şi sub formă diferenţială:

$\nu C dT = \nu C_v dT + dL$ (1), unde $dL = pdV$.

Din $pV = \nu RT \rightarrow p = \frac{\nu RT}{V}$ şi din $T = aV^2 \rightarrow V^2 = \frac{T}{a}$ pe care o diferenţiem: $2VdV = \frac{1}{a}dT \rightarrow dV = \frac{dT}{2aV} \rightarrow$ Relaţiile $p = \frac{\nu RT}{V}$ şi $dV = \frac{dT}{2aV}$, le introducem în $dL = pdV$ şi obţinem:

$dL = \frac{\nu RT}{V}\frac{dT}{2aV} = \frac{\nu RTdT}{2aV^2}$. Însă din $T = aV^2 \rightarrow V^2 = \frac{T}{a}$ pe care o substituim în $dL = \frac{\nu RTdT}{2aV^2} = \frac{\nu RTdTa}{2aT} = \frac{\nu RdT}{2} \rightarrow dL = \frac{\nu RdT}{2}$,

pe care o substituim în (1) şi avem : $\nu C dT = \nu C_v dT + \frac{\nu R}{2}dT \rightarrow$

$\rightarrow C = C_v + \frac{R}{2}$

b) Se dă $T = \frac{b}{V}$ unde b este un coeficient de proporţionalitate.

Se procedează analog ca la punctul a) şi se găseşte $C = C_v - R$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

99. Să se arate că adiabată unui gaz perfect descreşte mai repede decât izoterma aceluiaşi gaz. (Culegere Cone pag.191 /1996)

Rezolvare:

Se poate arăta fie grafic, fie pe cale matematică. Voi folosi calea matematică, aplicând calculul diferenţial.

a) Pentru transformarea adiabatică: $pV^{\gamma} = C_1$ unde $\frac{C_p}{C_v} = \gamma > 1$.

Diferenţiem ec. adiabatei : $pV^{\gamma} = C_1$ şi obţinem:

$$V^{\gamma} dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0 \rightarrow \quad V^{\gamma} dp = -\gamma p V^{\gamma-1} dV$$

Calculăm panta: $\frac{dp}{dV} = -\gamma p \frac{V^{\gamma-1}}{V^{\gamma}} \rightarrow \quad \frac{dp}{dV} = -\gamma p V^{-1} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{dp}{dV} = -\gamma p \frac{1}{V} \rightarrow \frac{dp}{dV} = -\frac{\gamma p}{V};$$

Panta adiabatei este: $\frac{dp}{dV} = -\frac{\gamma p}{V}$.

b) Pentru transformarea izotermă: $pV = C_2$ unde C_2 este o constantă.

Prin diferenţierea ec. izoterme $pV = C_2$, obţinem: $pdV + Vdp = 0$ sau

$$pdV = -Vdp \rightarrow \quad \frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}$$

Panta izotermei este : $\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}$.

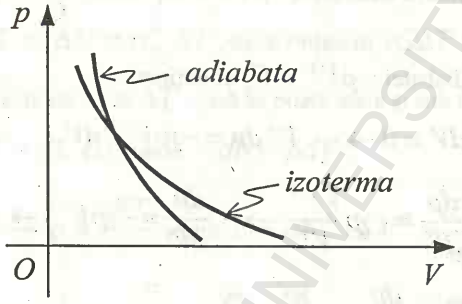
Panta adiabatei o notăm : $\left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad} = -\frac{\gamma p}{V}$ şi panta izotermei:

$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{iz} = -\frac{p}{V}$. Facem raportul : $\frac{\left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad}}{\left(\frac{dp}{dV}\right)_{iz}} = \frac{-\frac{\gamma p}{V}}{-\frac{p}{V}} = \gamma \rightarrow$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

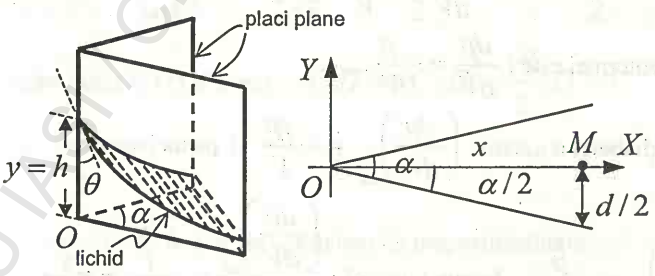
$\rightarrow \dfrac{\left(\dfrac{dp}{dV}\right)_{ad}}{\left(\dfrac{dp}{dV}\right)_{iz}} = \gamma$. Cum $\gamma > 1 \rightarrow \left(\dfrac{dp}{dV}\right)_{ad} > \left(\dfrac{dp}{dV}\right)_{iz}$, panta adiabatei este mai mare decât panta izotermei.

Reprezentarea grafică în p-V, a izotermei şi adiabatei:



100. Într-un lichid cu coeficientul de tensiune superficială σ şi densitate ρ se introduc plăci plane care fac între ele un unghi foarte mic α. Să se stabilească forma suprafeţei lichidului în spaţiu dintre cele două plăci. Unghiul de racordare este θ.

Rezolvare:



BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$y = h = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d}$ (1), unde $\theta \rightarrow$ unghi de racordare iar expresia matematică, reprezintă legea lui Jurin.

Din desen se vede: $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\frac{d}{2}}{x} = \dfrac{d}{2x} \rightarrow tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{d}{2x}$. Pentru unghiuri α foarte mici $tg\dfrac{\alpha}{2} \cong \dfrac{\alpha}{2}$ (rad) şi atunci : $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{d}{2x} \rightarrow d = \alpha x$.

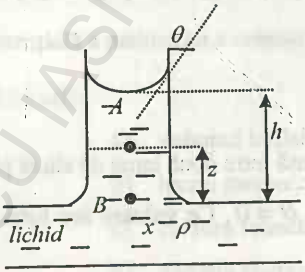
Substituind pe d în relaţia (1) obţinem : $y = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g \alpha x}$ sau

$y = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g\alpha}\dfrac{1}{x} \rightarrow$ este ecuaţia unei hiperbole iar suprafaţa în spaţiu are forma unui hiperboloid.

101. Un capilar vertical de rază r este introdus cu capătul său inferior într-un lichid. Să se stabilească în funcţie de înălţimea z legea de variaţie a presiunii p în capilar. (figura alăturată)

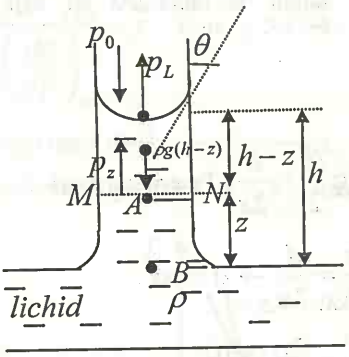
Să se stabilească presiunea în punctele A şi B. Coeficientul de tensiune superficială , unghiul de racordare şi presiunea atmosferică sunt: σ, θ şi p_0

(Culegere „Societate de Şt. Fizică Şi Chimie'' pag.185 /1993)



BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:



La nivelul MN putem scrie:

$$p_Z + p_L = p_0 + \rho g(h-z) \rightarrow$$

$$\rightarrow p_Z = p_0 + \rho g(h-z) - p_L \rightarrow$$

$$\rightarrow p_Z = p_0 + \rho gh - \rho gz - p_L \rightarrow$$

$$\rightarrow p_Z = p_0 + \rho g\frac{2\sigma\cos\theta}{\rho gr} - \rho gz -$$

$$-\frac{2\sigma\cos\theta}{r} = p_0 + \frac{2\sigma\cos\theta}{r} -$$

$$-\rho gz - \frac{2\sigma\cos\theta}{r} = p_0 - \rho gz \quad (1).$$ Dar din

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho gr} \rightarrow \rho g = \frac{2\sigma\cos\theta}{r}$$ şi substituind în (1) avem:

$$p_z = p_0 - \frac{2\sigma\cos\theta}{r}z.$$

Relaţia cu care se calculează presiunea unui punct la altitudinea z faţă de suprafaţa lichidului din vas este: $p_z = p_0 - \frac{2\sigma\cos\theta}{r}z$.

Se vede că presiunea unui punct din interiorul coloanei de lichid ridicat în tubul capilarului este mai mică decât presiunea atmosferică p_0.

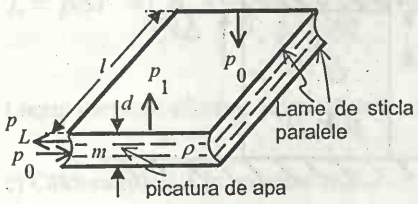
În punctul A: $p_A = p_0 - \frac{2\sigma\cos\theta}{r}$ iar în punctul B: $p_B = p_0$ căci $z = 0$.

102. O picătură de apă, de masă m este introdusă între două lame de sticlă plan paralele, udate de apă - unghiul de racordare $\theta = 0$. Ce valoare are forţa de

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

atracţie dintre plăci F dacă ele se găsesc la distanţa d una de alta ? Tensiunea superficială a apei este σ iar densitatea ρ. (Culegere „Societatea de Şt. Fizică şi Chimie" pag.188 /1998)

Rezolvare:



După verticală acţionează presiunea rezultantă:

$$p_0 - p_1 = \frac{F}{S} \ (1).$$

După orizontală presiunea rezultantă: $p_1 = p_0 - p_L$, încât relaţia (1) devine: $p_0 - p_0 + p_L = \frac{F}{S} \rightarrow \ p_L = \frac{F}{S} \rightarrow F = Sp_L$ (2)

Dar $m = V\rho = Sd\rho$ şi $p_L = \frac{2\sigma}{d}$, încât relaţia (2) devine: $F = S\frac{2\sigma}{d}$.

Prin substituirea $S = \frac{m}{d\rho}$, se obţine : $F = \frac{m}{d\rho}\frac{2\sigma}{d} = \frac{2\sigma m}{\rho d^2}$.

Forţa de atracţie dintre plăci este dată de relaţia: $F = \frac{2\sigma m}{\rho d^2}$.

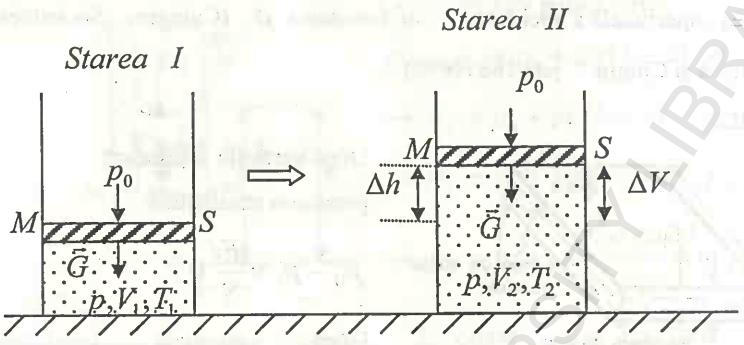
103. O masă m de gaz biatomic se află într-un cilindru cu piston de secţiune S, de masă M şi este încălzită până la temperatura T_2, încât energia potenţială a pistonului a crescut cu ΔE_p. Presiunea atmosferică este p_0.

Să se afle:

a) volumul iniţial al gazului;
b) lucrul mecanic la deplasarea pistonului;
c) căldura folosită în procesul izobar;
d) variaţia energiei interne a gazului în timpul destinderii

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare:



a) Din starea I în starea II gazul suferă o transformare izobară, pistonul deplasându-se pe distanța Δh în care are loc o variație a energiei potențiale gravitaționale: $\Delta E_p = Mg\Delta h \rightarrow \Delta h = \dfrac{\Delta E_p}{Mg}$. Dar

$\Delta V = S\Delta h = S\dfrac{\Delta E_p}{Mg}$. Cum $V_2 = V_1 + \Delta V \rightarrow V_1 = V_2 - \Delta V$ (1).

Aflarea $V_2 : pV_2 = \dfrac{m}{\mu}RT_2 \rightarrow V_2 = \dfrac{mRT_2}{p\mu} = \dfrac{mRT_2}{\mu\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S}\right)} =$

$= \dfrac{mRT_2S}{\mu(p_0S + Mg)}$. Cunoscând $V_2 = \dfrac{mRT_2S}{\mu(p_0S + Mg)}$ și $\Delta V = \dfrac{S\Delta E_p}{Mg}$

și substituind în relația (1), obținem:

$$V_1 = \frac{mRT_2S}{\mu(p_0S + Mg)} - \frac{S\Delta E_p}{Mg} = S\left[\frac{mRT_2}{\mu(p_0S + Mg)} - \frac{\Delta E_p}{Mg}\right].$$

Volumul inițial V_1 se calculează cu relația :

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$V_1 = S\left[\frac{mRT_2}{\mu(p_0S + Mg)} - \frac{\Delta E_p}{Mg}\right].$$

b) Calcularea lucrului mecanic se face cu relația :

$$L = p\Delta V = \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)S\frac{\Delta E_p}{Mg} = (p_0S + Mg)\frac{\Delta E_p}{Mg}.$$

Lucrul mecanic efectuat se calculează cu relația : $L = (p_0S + Mg)\frac{\Delta E_p}{Mg}$.

c) Căldura folosită în procesul izobar.

$$Q = \nu C_p\Delta T = \frac{m}{\mu}(C_v + R)(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}(\frac{5}{2}R + R)(T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1).$$

Aflarea T_1, se face din: $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 \rightarrow T_1 = \frac{pV_1\mu}{mR}$, unde

$p = p_0 + \frac{Mg}{S}$ și $V_1 = S\left[\frac{mRT_2}{\mu(p_0S + Mg)} - \frac{\Delta E_p}{Mg}\right]$ se cunosc, încât se calculează T_1.

Substituind pe T_1 în $Q = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1)$, se află expresia cantității de căldură folosită în procesul izobar al gazului.

d) Calcularea energiei interne se face din formula primului principiu al termodinamicii: $Q = \Delta U + L \rightarrow \Delta U = Q - L$. Se cunosc Q de la punctul a) și L de la punctul b), care apoi sunt substituiți în $\Delta U = Q - L$, aflăm expresia energiei interne a gazului ΔU.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

104. Un gaz ideal se află într-un cilindru cu piston mobil, fără frecare. Ştim că volumul gazului variază direct proporţional cu presiunea şi că $\frac{T_2}{T_1} = n$, să se afle : raportul presiunilor, graficul transformării gazului în p-V, V-T şi p-T.

Rezolvare:

Întrucât volumul gazului variază direct proporţional cu presiunea putem scrie: $V = Kp$.

Scriem ecuaţia Clapeyron-Mendeleev în două stări succesive:

$p_1V_1 = \nu RT_1$ şi $p_2V_2 = \nu RT_2$. Facem raportul:

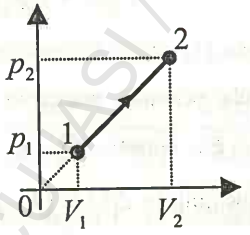
$\frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{\nu RT_1}{\nu RT_2} \rightarrow \frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{T_1}{T_2}$. Dar $V_1 = Kp_1$ şi $V_2 = Kp_2$ încât:

$\frac{p_1KV_1}{p_2KV_2} = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow \frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow \frac{p_2^2}{p_1^2} = \frac{T_2}{T_1}$. Cum $\frac{T_2}{T_1} = n$, atunci

$\rightarrow \frac{p_2^2}{p_1^2} = n \rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \sqrt{n}$.

Raportul presiunilor este $\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{n}$.

Întrucât $V = Kp$, grafic va fi în p-V o dreaptă:



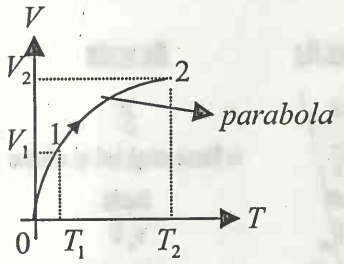
$$\begin{cases} pV = \nu RT \\ V = Kp \rightarrow p = \frac{V}{K} \end{cases}$$ şi

substituim în forma relaţiei:

$\frac{V^2}{K} = \nu RT \rightarrow V^2 = K\nu RT$ unde :

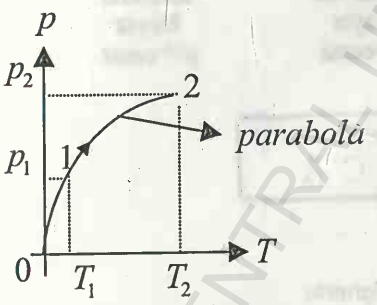
BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$KvR = C$ (valoarea constantă) încât $V^2 = CT \rightarrow$ ecuația unei parabole, încât în V-T se va reprezenta printr-o parabolă:



$$\begin{cases} pV = vRT \\ V = Kp \rightarrow \end{cases}$$ și substituim în prima relație și obținem

$pKp^2 = vRT \rightarrow p^2 = \frac{vR}{K}T$ unde $\frac{vR}{K} = C'$ (valoarea constantă) și atunci $p^2 = C'T \rightarrow$ ecuația unei parabole, iar în p-T se va reprezenta printr-o parabolă.



BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ERATĂ

Pag.	Rândul	În loc de	Se scrie
2	6 jos	α	$\vec{S}$
2	5 jos	$\vec{S}$	α între unghiul și dintre
4	6 sus	iar	încât
7	5 sus	$\nu_m, \vec{\nu}_m$	$\nu, \vec{\nu}$
25	2 sus	cazurile	cauzele
51	14 sus	prestunea	presa
83	figura	$\vec{v}_n$	$\vec{u}_n$
83	3 jos	U_n'	$\vec{u}_n'$
227	5 jos	adiabatice	adiabatic
233	3 sus	Hayer	Mayer
234	6 sus	pv=const.	pV=const.

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI
FIZICĂ

Tehnoredactare:
ing. Gheorghe Dulgheriu
prof. Călin Cocora

Grafică pe calculator:
prof. gr. I Cristina Carmen Brânză

Tipar Digital realizat la **Tipografia** pim
Șoseaua Ștefan cel Mare nr. 11
Iași - 700498
Tel. / fax: **0232-212740**
e-mail:editurapim@pimcopy.ro
www.pimcopy.ro

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

„Fotografia, realizată în ziua de 30 iunie 1974, în fața Liceului „Nicu Gane" îi reprezintă pe absolvenții cl. XIIA, împreună cu prof. Popa Constantin, cel care a înființat în anul școlar 1971/1972, prima clasă de fizică din liceu și din județul Suceava, în urma selectării celor mai valoroși elevi din liceele Fălticeni, Dolhasca , Liteni, Boroaia și Drăgușeni".

Prof. Doina Cozma-
director al Liceului „Nicu Gane'(1967-'1978)

Catalogul clasei:

1. Aioanei Petru
2. Aldea Dumitru
3. Andriescu Ionel
4. Apetre Viorica
5. Apter Rita
6. Asaftei Florin
7. Cibotaru Dan
8. Cibotaru Mircea
9. Crăciun Teodora
10. Damian Alexandru
11. Dina Dorina
12. Gagea Iulia
13. Grădinaru Constanța
14. Hărmănescu Mihai
15. Iacob Ecaterina
16. Lazăr Aurica
17. Maftei Marian
18. Mancu Tudor
19. Marian Cătălin
20. Merlă Doina
21. Muscă Gavril
22. Nedelcu Constantin
23. Ostafe Ștefan
24. Palade Marinela
25. Pascariu Constantin
26. Pintilie Maria
27. Roibu Lucia
28. Sandu Vasile
29. Vodă Alexandru
30. Sterea Constantin

ISBN 973-87531-0-4
9 799738 753104